

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023-2024**

Môn thi: Toán (chuyên)

(Dành cho thí sinh thi vào Trường THPT Chuyên Hạ Long)

*Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề
(Đề thi này có 01 trang)*

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{5+4\sqrt{x}}{2x+5\sqrt{x}-12} - \frac{2}{2\sqrt{x}-3} + \frac{3}{\sqrt{x}+4} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{5-6\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} \right)$ với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của P .

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + x - 6 = 3(x-2)\sqrt{x+1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - xy + y + 1 = 0 \\ x^2 + 3x - \sqrt{y^2 + 5x - 1} - 2 = 0 \end{cases}$.

Câu 3. (1,75 điểm)

a) Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $x^2 - y$ và $x^2 + y$ đều là các số chính phương. Chứng minh y là số chẵn.

b) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^3 - 2(a+b)^2 = b^3 + 19$.

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Hai đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Tia phân giác của góc BAC cắt đường thẳng BD và đường tròn (O) theo thứ tự tại M và I (I khác A). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), hai đường thẳng AC và IK cắt nhau tại Q , hai đường thẳng QH và AB cắt nhau tại P . Chứng minh:

a) Tứ giác $AMQK$ nội tiếp;

b) Tam giác APQ cân tại A ;

c) $\frac{1}{BC} + \frac{1}{DE} = \frac{1}{MQ}$.

Câu 5. (0,75 điểm)

Trên bảng cho 2023 số nguyên phân biệt, mỗi số đều có dạng $a^2 + b^2$ trong đó a, b là các số nguyên. Mỗi lần ta thực hiện một phép biến đổi như sau: Xóa hai số tùy ý rồi viết thêm một số bằng tích của hai số vừa xóa. Hỏi sau một số lần biến đổi, trên bảng có số bằng 26.3^{2023} hay không? Giải thích tại sao?

..... Hết

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

**HƯỚNG DẪN CHẤM THI TUYỂN SINH
VÀO LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2023-2024**

Môn thi: Toán (chuyên)
(Dành cho thí sinh thi vào trường THPT chuyên Hạ Long)

(Hướng dẫn này có 02 trang)

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
1 (2,0 đ)	a) $P = \left(\frac{5 + 4\sqrt{x} - 2(\sqrt{x} + 4) + 3(2\sqrt{x} - 3)}{(2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 4)} \right) : \left(\frac{x + 4\sqrt{x} + 5 - 6\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} \right)$	0,25
	$P = \left(\frac{8\sqrt{x} - 12}{(2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 4)} \right) : \left(\frac{x - 2\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} + 4} \right)$	0,5
	$P = \frac{4}{\sqrt{x} + 4} \cdot \frac{\sqrt{x} + 4}{x - 2\sqrt{x} + 5} = \frac{4}{x - 2\sqrt{x} + 5}$	0,25
	b) Ta có $x - 2\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 4 \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 5 \geq 4$ với $\forall x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$.	0,5
	Khi đó $P \leq 1$ với $\forall x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.	0,25
	Giá trị lớn nhất của P là 1 khi $x = 1$	0,25
2 (2,0đ)	a) Điều kiện: $x \geq -1$ Ta có $x^2 + x - 6 = 3(x - 2)\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow (x - 2)(x + 3) - 3(x - 2)\sqrt{x + 1} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 3 - 3\sqrt{x + 1}) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn đk) hoặc $x + 3 - 3\sqrt{x + 1} = 0$	0,25
	$x + 3 - 3\sqrt{x + 1} = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 3\sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = 3$ (thỏa mãn đk) Tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 2; 3\}$.	0,5
	b) $x^2 - 2x - xy + y + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 1 - y) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $y = x - 1$	0,25
	Với $x = 1$ ta có phương trình $\sqrt{y^2 + 4} = 2 \Leftrightarrow y = 0$	0,25
	Với $y = x - 1$ ta có phương trình $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} - 2 = 0$ Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x}, t \geq 0$, pt trở thành $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -1$ (loại), $t = 2$ (thỏa mãn) Với $t = 2$ ta được $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1; x_2 = -4$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm là $(1; 0); (-4; -5)$.	0,25
3 (1,75đ)	a) $x^2 - y = a^2; x^2 + y = b^2$ với a, b là các số tự nhiên $\Rightarrow 2y = b^2 - a^2$	0,25
	Ta có $b^2 - a^2$ là số chẵn suy ra a, b là hai số cùng chẵn hoặc cùng lẻ $\Rightarrow (b - a)(b + a) : 4 \Rightarrow y : 2$.	0,5
	b) $a^3 - 2(a + b)^2 = b^3 + 19 \Leftrightarrow (a - b - 2)(a^2 + ab + b^2) = 2ab + 19$	0,25
	Vì $2ab + 19 > 0, a^2 + ab + b^2 > 0 \Rightarrow a - b - 2 \geq 1 \Rightarrow a - b \geq 3$	0,25

	Từ $a - b - 2 \geq 1 \Rightarrow a^2 + ab + b^2 \leq 2ab + 19 \Rightarrow (a - b)^2 < 19 \Rightarrow a - b \leq 4$	
	Vì $2ab + 19$ lẻ $\Rightarrow a - b - 2$ lẻ $\Rightarrow a - b$ lẻ $\Rightarrow a - b = 3$	0,25
	Từ $a - b = 3 \Rightarrow b^2 + 3b - 10 = 0 \Rightarrow b = -5$ (loại) hoặc $b = 2$. Vậy $b = 2; a = 5$.	0,25
4 (3,5đ)	a) $\widehat{BKI} = \widehat{BAI}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{BI}$)	0,5
	mà $\widehat{BAI} = \widehat{IAC} \Rightarrow \widehat{MAQ} = \widehat{MKQ} \Rightarrow$ tứ giác AMQK nội tiếp	0,5
	b) Tứ giác AMQK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MQA} = \widehat{MKA}$, lại có $\widehat{BKA} = \widehat{BCA}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{AB}$) $\Rightarrow \widehat{MQA} = \widehat{BCA} \Rightarrow MQ \parallel BC$	0,5
	H là trực tâm của ΔABC nên $AH \perp BC \Rightarrow MQ \perp AH$	0,25
	ΔAHQ có $HD \perp AQ, MQ \perp AH$ nên M là trực tâm $\Rightarrow AM \perp HQ$	0,25
	ΔAPQ có AM là phân giác, AM là đường cao nên ΔAPQ cân tại A.	0,25
	c) Gọi N là giao điểm của AI và CE. $\widehat{AIK} = \widehat{ABK}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{AK}$), $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow \widehat{NIQ} = \widehat{NCQ} \Rightarrow$ tứ giác NICQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QNC} = \widehat{QIC}$	0,25
	Có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ nên tứ giác BEDC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DBC}, \widehat{KBC} = \widehat{KIC}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{KC}$) $\Rightarrow \widehat{QNC} = \widehat{DEC} \Rightarrow NQ \parallel ED$	0,25
	Tứ giác NICQ nội tiếp nên $\widehat{MNQ} = \widehat{QCI}$, tứ giác AMQK nội tiếp nên $\widehat{QMN} = \widehat{AKQ}$ mà $\widehat{AKI} = \widehat{ACI}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\widehat{AI}$) $\Rightarrow \widehat{QMN} = \widehat{QNM} \Rightarrow \Delta QMN$ cân $\Rightarrow QM = QN$.	0,25
5 (0,75đ)	$MQ \parallel BC \Rightarrow \frac{MQ}{BC} = \frac{DQ}{DC}, NQ \parallel ED \Rightarrow \frac{NQ}{ED} = \frac{CQ}{CD}$, lại có $MQ = NQ$ nên $\frac{MQ}{BC} + \frac{MQ}{DE} = \frac{DQ}{DC} + \frac{CQ}{CD} = 1 \Rightarrow \frac{1}{BC} + \frac{1}{DE} = \frac{1}{MQ}$.	0,5
	Do đẳng thức $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz + yt)^2 + (xt - yz)^2$ nên sau mỗi lần biến đổi, các số trên bảng luôn có dạng $a^2 + b^2$	0,25
	Do $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ nên $a^2 + b^2 \equiv 0, 1, 2, 4, 5 \pmod{8}$	0,25
	Vì $26.3^{2023} \equiv 26.3.9^{1011} \equiv 6 \pmod{8}$ nên số 26.3^{2023} không có trên bảng.	0,25

Những chú ý khi chấm thi:

1. Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết, lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới cho điểm tối đa.
2. Các cách giải khác nếu đúng vẫn cho điểm. Tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết.
3. Có thể chia nhỏ điểm thành phần nhưng không dưới 0,25 điểm và phải thống nhất trong cả tổ chấm. Điểm thống nhất toàn bài là tổng số điểm các bài đã chấm, **không làm tròn.**

..... Hết

