

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 150 phút

Bài 1. 1) Cho biểu thức $P = \frac{3x+5\sqrt{x}-11}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

2) Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x - \sqrt{x^2 + 5})(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5$

Tính giá trị của biểu thức $A = x^{2023} + y^{2023}$

Bài 2. a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$

Bài 3. a) Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d): $y = mx + 2m + 2$ (m khác 0) đạt giá trị lớn nhất.

b) Tìm đa thức f(x), biết rằng f(x) chia cho x-3 dư 2, f(x) chia cho x+4 dư 9, f(x) chia cho $x^2 + x - 12$ được thương là $x^2 + 3$ và còn dư.

c) Một cửa hàng lưu niệm được nhận đặt gói tất cả 153 hộp quà như nhau bằng ba loại giấy màu xanh, đỏ, vàng để chuẩn bị cho Lễ Giáng sinh. Biết số hộp quà gói được màu đỏ bằng $\frac{8}{9}$ số hộp quà màu xanh, số hộp quà gói được màu vàng bằng $\frac{17}{16}$ số hộp quà màu đỏ và 153 hộp quà đều được cửa hàng gói hết. Tính số hộp quà mỗi màu mà cửa hàng đã gói được.

Bài 4. Cho đường tròn (O; R) và một đường thẳng d cố định sao cho khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d bằng 2R. Từ điểm A bất kì trên đường thẳng d, kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Đoạn thẳng OA cắt BC tại H và cắt đường tròn (O) tại M. Kẻ CK vuông góc với đường kính BD tại K.

a) Chứng minh rằng $CA \cdot CD = CK \cdot OA$

b) Gọi I là giao điểm của AD và CK. Chứng minh rằng I là trung điểm của CK.

c) Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác ABOC đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Bài 5. a) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{2b+c} + \frac{b^2}{2c+a} + \frac{c^2}{2a+b} \geq \frac{a+b+c}{3}$

b) Trong một buổi gặp gỡ giao lưu giữa các học sinh đến từ n quốc gia, người ta nhận thấy rằng cứ 10 học sinh bất kì thì có ít nhất 3 học sinh đến từ một quốc gia. Gọi k là số quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ. Chứng minh rằng $n < \frac{k+10}{2}$

----- HẾT -----

Ghi chú: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1. 1) Cho biểu thức $P = \frac{3x+5\sqrt{x}-11}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - 1$

a) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x+5\sqrt{x}-11}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - 1 \quad (\text{đk: } x \neq 1) \\ &= \frac{3x+5\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - 1 \\ &= \frac{3x+5\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+6\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

$$P = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

Vì x là số nguyên, để P là số nguyên thì $\sqrt{x}+2 \in U(5) = \{1; -1; 5; -5\}$

$$x \in \{9\}$$

Vậy x = 9 thì P là số nguyên

2) Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-\sqrt{x^2+5})(y-\sqrt{y^2+5})=5$

Tính giá trị của biểu thức $A = x^{2023} + y^{2023}$

Lời giải:

Ta có: $(x-\sqrt{x^2+5})(y-\sqrt{y^2+5})=5$

$$(x+\sqrt{x^2+5})(x-\sqrt{x^2+5})(y-\sqrt{y^2+5})=5(x+\sqrt{x^2+5})$$

$$-5(y-\sqrt{y^2+5})=5(x+\sqrt{x^2+5})$$

$$-y+\sqrt{y^2+5}=x+\sqrt{x^2+5} \quad (1)$$

Tương tự: $-x+\sqrt{x^2+5}=y+\sqrt{y^2+5} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $-(x+y)=x+y$

$$\Rightarrow x + y = 0$$

$$\Rightarrow x = -y$$

Ta có: $A = x^{2023} + y^{2023} = (-y)^{2023} + y^{2023} = 0$

Vậy $A = 0$

Bài 2.

a) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5$

Lời giải:

$$\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5$$

$$\left(\sqrt{x^2 + 12} - 4\right) - \left(\sqrt{x^2 + 5} - 3\right) - 3x + 6 = 0$$

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3(x - 2) = 0$$

$$(x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 \right) = 0$$

Vì $\sqrt{x^2 + 12} > \sqrt{x^2 + 5}$ nên $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} > 0$ suy ra $3x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3}$

Khi đó $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 < 0$

Suy ra $x - 2 = 0$

$$x = 2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$

b) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$

Lời giải:

$$x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2xy) + (y^2 + xy) - (x + y) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 + y(y + x) - (x + y) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + 2y - 1) = -3 = (-1).3 = 1.(-3) = 3.(-1) = (-3).1$$

Suy ra các cặp nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn là: $(4; -3); (-8; 5); (-6; 5); (6; -3)$

Bài 3.

a) Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $(d): y = mx + 2m + 2$ (m khác 0) đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải:

Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cố định của của đường thẳng $d: y = mx + 2m + 2$

Khi đó

$$y_o = mx_o + 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow y_o - mx_o - 2m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x_o + 2)m + y_o - 2 = 0 \text{ với mọi } m \text{ khi } \begin{cases} x_o + 2 = 0 \\ y_o - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -2 \\ y_o = 2 \end{cases}$$

Vậy điểm $M(-2; 2)$ là điểm cố định của d

Kẻ OH vuông góc với (d) tại H , ta có khoảng cách từ O đến (d) bằng OH .

Khi (d) thay đổi theo m và luôn đi qua $M(-2; 2)$ cố định ta luôn có $OH \leq OM$

$$\text{Suy ra } OH_{\max} = OM = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow H \text{ trùng với } M \Leftrightarrow OM \perp (d) \text{ tại } M$$

Đường thẳng OM có dạng $y = ax$ đi qua $M(-2; 2) \Rightarrow 2 = a \cdot (-2) \Rightarrow a = -1$

Điều kiện để đường thẳng OM vuông góc với d là: $m \cdot (-1) = -1 \Rightarrow m = 1$

Vậy với $m = 1$ thì khoảng cách từ O tới (d) là lớn nhất bằng $2\sqrt{2}$

b) Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 2, $f(x)$ chia cho $x+4$ dư 9, $f(x)$ chia cho $x^2 + x - 12$ được thương là $x^2 + 3$ và còn dư.

Lời giải:

Vì $f(x)$ chia cho $x - 3$ dư 2 nên $f(3) = 2$

$f(x)$ chia cho $x + 4$ dư 9 nên $f(-4) = 9$

$f(x)$ chia $x^2 + x - 12$ được thương là $x^2 + 3$ và còn dư nên $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 + x - 12) + (ax + b)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(3) = 3a + b = 2 \\ f(-4) = 4a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -19 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } f(x) = (x^2 + 3)(x^2 + x - 12) + (7x - 19)$$

c) Một cửa hàng lưu niệm được nhận đặt gói tất cả 153 hộp quà như nhau bằng ba loại giấy màu xanh, đỏ, vàng để chuẩn bị cho Lễ Giáng sinh. Biết số hộp quà gói được màu đỏ bằng $\frac{8}{9}$ số hộp quà màu xanh, số hộp quà gói được màu vàng bằng $\frac{17}{16}$ số hộp quà màu đỏ và 153

hộp quà đều được cửa hàng gói hết. Tính số hộp quà mỗi màu mà cửa hàng đã gói được.

Lời giải:

Gọi số hộp quà gói bằng ba loại giấy màu đỏ, xanh, vàng lần lượt là a, b, c (hộp quà; $a, b, c \in \mathbb{N}^*$) suy ra $a + b + c = 153$

$$\text{Theo bài ta có: } \frac{a}{8} = \frac{b}{9} \Rightarrow \frac{a}{16} = \frac{b}{18} \quad (1)$$

$$\frac{a}{16} = \frac{c}{17} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a}{16} = \frac{b}{18} = \frac{c}{17} = \frac{a+b+c}{16+18+17} = \frac{153}{51} = 3$$

Số hộp quà màu đỏ là: $16 \cdot 3 = 48$ (hộp)

Số hộp quà màu xanh là: $18 \cdot 3 = 54$ (hộp)

Số hộp quà màu vàng là: $17.3 = 51$ (hộp)

Vậy số hộp quà màu đỏ, xanh, vàng lần lượt là 48, 54, 51 hộp.

Bài 4. Cho đường tròn $(O; R)$ và một đường thẳng d cố định sao cho khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng d bằng $2R$. Từ điểm A bất kì trên đường thẳng d , kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Đoạn thẳng OA cắt BC tại H và cắt đường tròn (O) tại M . Kẻ CK vuông góc với đường kính BD tại K .

a) Chứng minh rằng $CA.CD = CK.OA$

b) Gọi I là giao điểm của AD và CK . Chứng minh rằng I là trung điểm của CK .

c) Xác định vị trí của điểm A để diện tích tứ giác $ABOC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải:

a) Chứng minh $CA.CD = CK.OA$

Tứ giác $ABOC$ nội tiếp suy ra

$$\angle CAO = \angle CBO \quad (1)$$

Tam giác CBK vuông tại K nên

$$\angle CBO + \angle BCK = 90^\circ \quad (2)$$

C nằm trên đường tròn tâm (O) đường kính BD nên

$$\angle BCD = 90^\circ \Rightarrow \angle BCK + \angle KCD = 90^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle CAO = \angle KCD$

Xét tam giác ACO và tam giác CKD có: $\angle CAO = \angle KCD$ (cmt)

$$\angle ACO = \angle CKD (=90^\circ)$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \triangle CAO \sim \triangle KCD (g.g) \Rightarrow \frac{CA}{AO} = \frac{KC}{CD} \Leftrightarrow CA.CD = KC.OA \quad (dpcm)$$

b) Gọi L là giao điểm của AD và BC .

$$\text{Ta có } \angle ACL + \angle ACB = 90^\circ$$

$$\angle ALC + \angle ABC = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \angle ACB = \angle ABC \text{ (vì tam giác } ABC \text{ cân có } AB = AC)$$

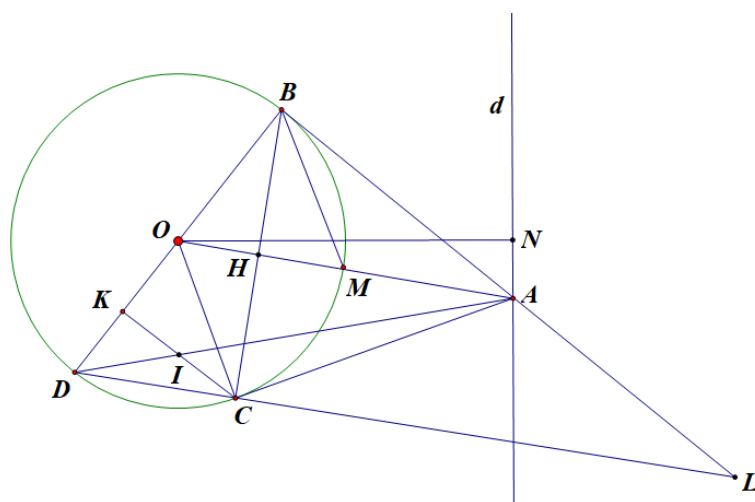
$$\text{Suy ra } \angle ACL = \angle ALC \Rightarrow \text{tam giác } CAL \text{ cân tại } A \Rightarrow AC = AL = AB$$

$$\text{Ta có: } CK \parallel BL \Rightarrow \frac{IK}{AB} = \frac{DI}{DA} = \frac{IC}{AL} \text{ (định lý Talet)}$$

$$\text{Mà } AB = AL \text{ suy ra } IK = IC \Rightarrow I \text{ là trung điểm } KC \text{ (đpcm)}$$

c) Gọi N là hình chiếu của O trên đường thẳng $(d) \Rightarrow ON = 2R$

$$\text{Ta có } S_{ABOC} = 2S_{ABO} = AB.OB = AB.R = \sqrt{OA^2 - OB^2}.R = \sqrt{OA^2 - R^2}.R$$



Vì R không đổi nên S_{ABOC} nhỏ nhất khi OA nhỏ nhất.

Tam giác ONA vuông tại N nên $OA \geq ON$ do đó OA nhỏ nhất khi A trùng N.

$$\text{Khi đó } OA = 2R \Rightarrow S_{ABOC} = \sqrt{OA^2 - R^2} \cdot R = \sqrt{(2R)^2 - R^2} \cdot R = \sqrt{3R^2} \cdot R = R^2 \cdot \sqrt{3}$$

Vậy S_{ABOC} nhỏ nhất bằng $R^2 \cdot \sqrt{3}$ khi A trùng N.

Bài 5.

a) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{2b+c} + \frac{b^2}{2c+a} + \frac{c^2}{2a+b} \geq \frac{a+b+c}{3}$

Lời giải: Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{a^2}{2b+c} + \frac{2b+c}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{2b+c} \cdot \frac{2b+c}{9}} = \frac{2a}{3}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{b^2}{2c+a} + \frac{2c+a}{9} \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{2c+a} \cdot \frac{2c+a}{9}} = \frac{2b}{3}$$

$$\frac{c^2}{2a+b} + \frac{2a+b}{9} \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{2a+b} \cdot \frac{2a+b}{9}} = \frac{2c}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2b+c} + \frac{b^2}{2c+a} + \frac{c^2}{2a+b} + \frac{3(a+b+c)}{9} \geq \frac{2(a+b+c)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2b+c} + \frac{b^2}{2c+a} + \frac{c^2}{2a+b} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$

b) Trong một buổi gặp gỡ giao lưu giữa các học sinh đến từ n quốc gia, người ta nhận thấy rằng cứ 10 học sinh bất kì thì có ít nhất 3 học sinh đến từ một quốc gia. Gọi k là số quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ. Chứng minh rằng $n < \frac{k+10}{2}$

Lời giải:

Vì có k quốc gia có đúng một học sinh tham dự buổi gặp gỡ nên sẽ có $n - k$ quốc gia có ít nhất hai học sinh tham dự cuộc gặp gỡ. Từ k quốc gia đầu, ta lấy từ mỗi quốc gia tuột học sinh. Từ $n - k$ quốc gia sau, ta lấy từ mỗi quốc gia hai học sinh. Ta được một nhóm học sinh gồm $k + 2(n - k) = 2n - k$ học sinh, trong đó không có ba học sinh đến từ một quốc gia. Từ điều kiện đề bài ta suy ra $2n - k < 10$, tức là $n < \frac{k+10}{2}$