

Bài 1. (1,5 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} - \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right) \begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$
2. Cho hàm số $y = mx + m - 1$, với m là tham số. Chứng minh đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định với mọi m

Bài 2. (1,5 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 - n - 5$ là số chính phương
2. Ta nhận thấy số 2025 thỏa mãn tính chất rất đẹp : $2025 = (20 + 25)^2$. Tìm tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số $\overline{abcd}$ cũng thỏa mãn tính chất trên, nghĩa là $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2$

Bài 3. (2,5 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2x}{x^2 + 1}$
2. Giải phương trình $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{x + 3} = 4$
3. Cho biểu thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số thực. Biết $f(1) = 2$, $f(2) = 3$. Tính giá trị của $Q = f(5) - 6f(3) + 2020$

Bài 4. (3,5 điểm)

1. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Tia phân giác của $\angle HAC$ cắt HC tại D . Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên AC . Tính AB , biết $BC = 25\text{cm}$, $DK = 6\text{cm}$
2. Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Đường thẳng AH cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K . Gọi L là giao điểm của hai đường thẳng CH và AB , S là giao điểm của hai đường thẳng BH và AC
 - a) Chứng minh tứ giác $BCSL$ nội tiếp và BC là đường trung trực của đoạn thẳng HK
 - b) Gọi M là trung điểm của BC , đường thẳng OM cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại P, Q . Gọi N là trung điểm PQ . Chứng minh hai đường thẳng HM và AN cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O) .

Bài 5. (1,0 điểm) Cho 16 số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 2021, đôi một nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong 16 số trên có ít nhất một số là số nguyên tố.

Bài 1.

1. Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \cdot \left(\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1} - \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1} \right) \\ &= \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{a\sqrt{a} - 2a + \sqrt{a} - a\sqrt{a} - 2a - \sqrt{a}}{a-1} \\ &= \frac{a-1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{-4a}{a-1} = -2\sqrt{a} \end{aligned}$$

2. Xét điểm $A(x_0, y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ

Khi đó, A là điểm cố định khi và chỉ khi $A \in d$ với $y = mx + m - 1$ với mọi m

$$\Leftrightarrow y_0 = mx_0 + m - 1$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1)m - (y_0 + 1) = 0 \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -1)$$

Vậy đồ thị hàm số $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định $A(-1; -1)$ với mọi m

Bài 2.

1. Số $n^2 - n - 5$ chính phương $\Leftrightarrow 4n^2 - 4n - 20 = k^2 (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow (2n-1)^2 - k^2 = 21 \Leftrightarrow (2n+k-1)(2n-k-1) = 21$$

Vì $(2n+k-1) > (2n-k-1) > 0$ nên có các trường hợp sau :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n+k-1=21 \\ 2n-k-1=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2n+k-1=7 \\ 2n-k-1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=3 \\ n=6 \end{cases}$$

2. Giả sử $\overline{abcd}$ là số thỏa tính chất trên, $\overline{abcd} = (\overline{ab} + \overline{cd})^2$

Đặt $x = \overline{ab}, y = \overline{cd}$, ta có : $10 \leq x \leq 99, 0 \leq y \leq 99$, khi đó

$$\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 100x + y$$

Do đó ta có: $100x + y = (x + y)^2 \Leftrightarrow 10 < x + y < 100$

$$\Leftrightarrow 99x = (x + y)^2 - (x + y) = (x + y)(x + y - 1)$$

Vì vế phải là tích của hai số tự nhiên liên tiếp có 2 chữ số nên $99x$ phải được phân tích ở dạng đó

Ta biết các bội của 11 có hai chữ số gồm $\{11, 22, 33, 44, 55, \dots, 88, 99\}$ bội của 9 có hai chữ số gồm $\{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$

Như vậy x chỉ có thể là các số sau $\{98, 20, 30\}$

Kiểm tra trực tiếp ta thấy các số 9801, 2025, 3025 thỏa tính chất của đề bài

Bài 3.

1. Ta có biểu thức xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$P = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow Px^2 - 2x + P = 0 (*)$$

$$+) P = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$+) P \neq 0 \Rightarrow (*) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' = 1 - P^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1$$

Vậy $\min P = -1$ và $\max P = 1$

2. Giải phương trình : $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} = 4$

Điều kiện $x \geq \frac{-1}{3}$

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} = 4 \Leftrightarrow 3x+1+x+3+2\sqrt{(3x+1)(x+3)} = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(x+3)} = 6 - 2x \Leftrightarrow (3x+1)(x+3) = (6-2x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 34x + 33 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 33 \end{cases}$$

Thử lại, chọn $x = 1$

3. Đặt $P(x) = f(x) - (x+1)$

Do đó $P(1) = 0, P(2) = 0$ hay $x = 1, x = 2$ là hai nghiệm của phương trình $P(x) = 0$

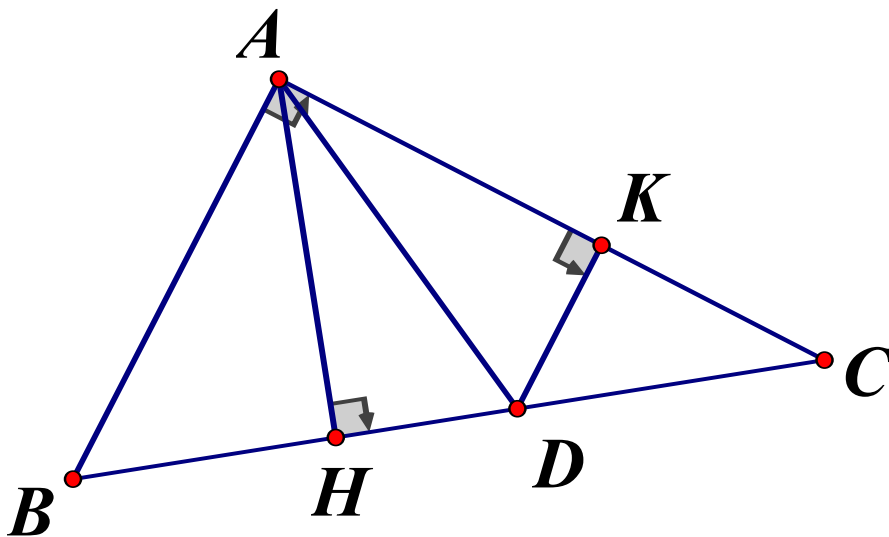
Mà $P(x)$ là đa thức bậc 3 nên ta có $P(x) = (x-1)(x-2)(x-m)$. Khi đó

$$f(5) = P(5) + 6 = 4 \cdot 3 \cdot (5-m) + 6$$

$$f(3) = P(3) + 4 = 2 \cdot 1 \cdot (3-m) + 4$$

$$\text{Do vậy, } Q = f(5) - 6f(3) + 2020 = 12(5-m) - 12(3-m) - 18 + 2020 = 2026$$

Bài 4.



1. Ta có : $\triangle HAD = \triangle KAD$ (AD chung; $\angle A_1 = \angle A_3$) $\Rightarrow HD = KD = 6\text{cm}$

Ta lại có $\angle A_1 = \angle C$ (cùng phụ $\angle B$), $\angle BAD = \angle A_1 + \angle A_3$; $\angle ADB = \angle C + \angle A_2$

Mà $\angle A_1 = \angle A_2, \angle A_3 = \angle C \Rightarrow \angle BAD = \angle ADB \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B nên $BA = BD$

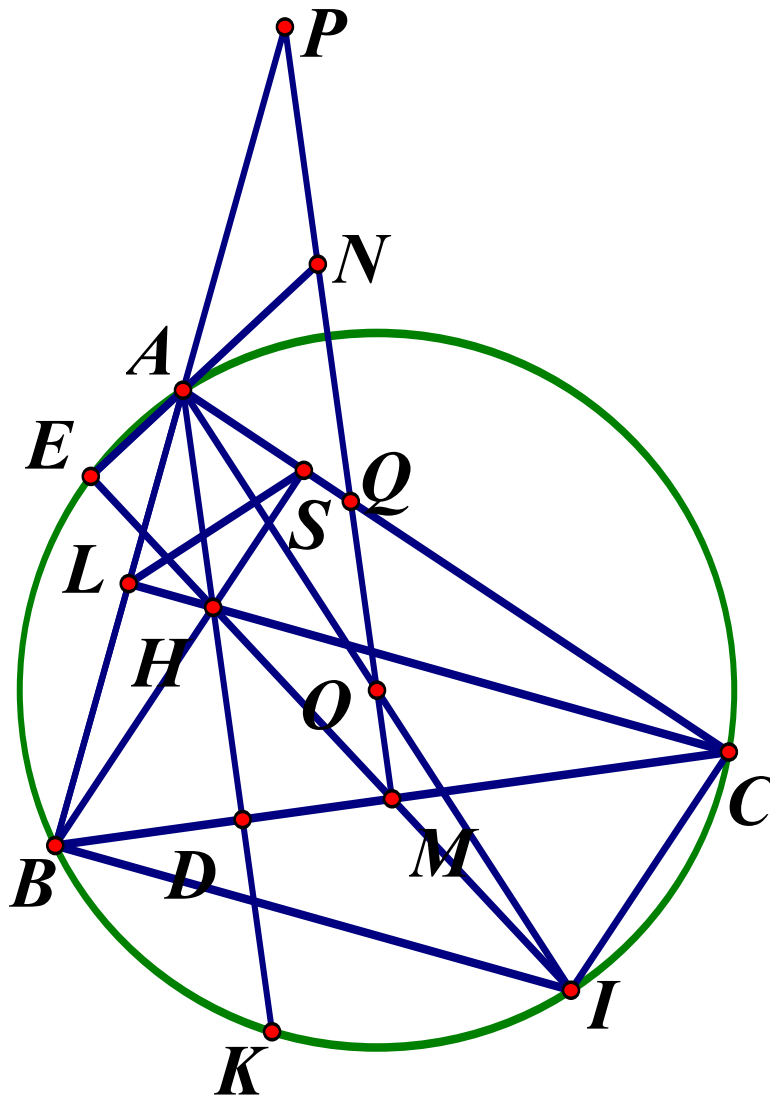
Đặt $BA = x \Rightarrow BD = x \Rightarrow BH = x - 6$

$\triangle ABC$ vuông tại A, có đường cao AH nên $AB^2 = BH \cdot BC$

$$\Rightarrow x^2 = (x - 6) \cdot 25 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

Vậy $AB = 10\text{cm}$ hoặc $AB = 15\text{cm}$

2.



- a) Ta có H là trực tâm nên $BH \perp AC, CH \perp AB \Rightarrow \angle BSC = \angle CLB = 90^\circ$
 $\Rightarrow BCSL$ là tứ giác nội tiếp

Ta có : $\angle BKA = \angle BCA$ (cùng chắn cung AB)

Mặt khác , $\angle BKA = \angle AHS$ (cùng phụ với $\angle HAS$) và $\angle AHS = \angle BHK$

Do đó, $\angle BKH = \angle BHK \Rightarrow \triangle BKH$ là tam giác cân tại B. Mà $BD \perp HK$ nên BC là đường trung trực của HK

- b) Gọi AI là đường kính của (O)

Khi đó, $CH \parallel BI$ (cùng $\perp AB$), $CI \parallel BH$ ($\perp AC$)

Suy ra $BHCI$ là hình bình hành nên H, M, I thẳng hàng

Gọi E là giao điểm của $HM, AN \Rightarrow E \in (O)$

Ta có $\angle HCB = \angle LSB$ (cùng chắn cung BI của đường tròn $(BCSL)$)

$\angle LSB = \angle LAH$ (cùng chắn cung LH của đường tròn $(ALHS)$)

$\angle LAH = \angle APQ$ (do $OM \parallel AH$) $\Rightarrow \angle HCB = \angle APQ$

Tương tự ta có $\angle HBC = \angle SLC = \angle HAS = \angle AQP$

Từ đó suy ra $\triangle APQ \sim \triangle HCB$

Mà N là trung điểm PQ, M là trung điểm CB nên $\triangle ANQ \sim \triangle HMB$

Do đó, $\angle BHM = \angle NAQ$ mà $\angle BHM = \angle EHS$ (đối đỉnh)

Suy ra $\angle EHS = \angle NAQ \Rightarrow AEHS$ là tứ giác nội tiếp

Mà $\angle ASH = 90^\circ$ nên $\angle AEH = 90^\circ \Rightarrow E \in (O)$

Bài 5.

Giả sử 16 số đã cho gồm $a_1, a_2, \dots, a_{16}$ và tất cả chúng đều là hợp số

Gọi p_i là ước nguyên tố nhỏ nhất của số a_i ($i = 1, \dots, 16$)

Vì 16 số đã cho đôi một nguyên tố cùng nhau nên 16 số p_i là phân biệt

Gọi $p_k = \max_{i=1, \dots, 16} (p_i)$, khi đó $p_k \geq 51$ vì nhỏ hơn 51 chỉ có 15 số nguyên tố

$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47\}$

Mà p_k là ước số nguyên tố nhỏ nhất của a_k nên $a_k \geq p_i; p_k \geq 51^2 = 2601$ mâu thuẫn với $a_k < 2021$

Vậy trong số các số đã cho phải có ít nhất 1 số nguyên tố.