

Câu 1 (5,0 điểm).

- a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $A = 2025^n + 112^n - 89^n - 24^n$ chia hết cho 2024.
- b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $5x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 2y + 9 = 0$.

Câu 2 (5,0 điểm).

- a) Giải phương trình: $x^2 - 6x + 4 = \sqrt{7x - 4}$.
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3xy - 3x + 4y + 2 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 = 4 \end{cases}$$

Câu 3 (5,0 điểm).

- a) Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn: $a^2 + b = 2ab$. Chứng minh $3a^2 + b \geq \frac{8}{3}$.
- b) Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$.

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{a}{bc(a+1)} + \frac{b}{ca(b+1)} + \frac{c}{ab(c+1)}$.

Câu 4 (5, 0 điểm).

Cho tam giác nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại điểm T . Kẻ $AH \perp OT (H \in OT)$, đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D . Gọi K là trung điểm của AH .

- a) Chứng minh TD là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- b) Chứng minh tứ giác $BHOC$ nội tiếp
- c) Chứng minh $\angle AKB = \angle ACD$ và $\angle ABD = \angle AKC$
- d) Chứng minh $\frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

(gồm 04 trang)

Câu 1 (5,0 điểm).

a) Ta có $2024 = 88.23$; $A = (2025^n - 89^n) + (112^n - 24^n)$. (0,5 đ)

Vì $(88, 23) = 1$ nên để chứng minh A chia hết cho 2024

ta chứng minh A chia hết cho 88 và 23. (0,5 đ)

Áp dụng tính chất $a^n - b^n : a - b$ với mọi số tự nhiên n

và $a - b \neq 0$, suy ra $2025^n - 89^n$ chia hết cho $2025 - 89 = 1936 = 88.22$

hay $2025^n - 89^n$ chia hết cho 88. (0,5 đ)

Tương tự thì $112^n - 24^n$ chia hết cho 88 . Vậy A chia hết cho 88. (0,5 đ)

Tiếp tục phân tích $A = (2025^n - 24^n) + (112^n - 89^n)$.

Lập luận như trên thì ta có $2025^n - 24^n$ và $112^n - 89^n$ chia hết cho 23, tức là A chia hết cho 23. Vậy ta có điều phải chứng minh. (0,5 đ)

b) Ta có: $5x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 2y + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x - y - 1)^2 + (x + 3)^2 = 1$ (1,0 đ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y - 1)^2 = 1 \\ (x + 3)^2 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} (2x - y - 1)^2 = 0 \\ (x + 3)^2 = 1 \end{cases} \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = \pm 1 \\ x = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases} \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -6 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -3 \\ y = -8 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn phương trình là:

$$(x; y) \in \{(-2; -5), (-3; -6), (-3; -8), (-4; -9)\} \quad (0,5 \text{ đ})$$

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Điều kiện: $x \geq \frac{7}{4}$ (0,25 đ)

Phương trình đã cho tương đương với phương trình: $x^2 + x = (7x - 4) + \sqrt{7x - 4}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = (7x-4) + \sqrt{7x-4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\sqrt{7x-4} + \frac{1}{2}\right)^2 \quad (0,5 \text{ đ})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \sqrt{7x-4} + \frac{1}{2} \\ -x - \frac{1}{2} = \sqrt{7x-4} + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x-4} = x \\ \sqrt{7x-4} = -x-1 \end{cases} \quad (0,5 \text{ đ})$$

Ta có: $\sqrt{7x-4} = x \Leftrightarrow 7x-4 = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$ (Với $x \geq \frac{7}{4}$) (0,5 đ)

Do $x \geq \frac{7}{4}$ nên $\sqrt{7x-4} \geq 0$ và $-x-1 \leq 0$ nên phương trình

$$\sqrt{7x-4} = -x-1 \text{ vô nghiệm} \quad (0,5 \text{ đ})$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$ (0,25 đ)

b) Ta có: $x^2 + 2y^2 - 3xy - 3x + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2y-2)(x-y-1) = 0$ (0,75 đ)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \quad (0,25 \text{ đ})$$

Với $x-2y-2=0 \Rightarrow x=2y+2$, thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$5y^2 + 12y + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases} \quad (0,5 \text{ đ})$$

Ta có $y = -2 \Rightarrow x = -2$; $y = -\frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{6}{5}$ (0,25 đ)

Với $x-y-1=0 \Rightarrow x=y+1$, thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$y^2 + 6y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -3 - \sqrt{10} \\ y = -3 + \sqrt{10} \end{cases} \quad (0,5 \text{ đ})$$

Ta có $y = -3 - \sqrt{10} \Rightarrow x = -2 - \sqrt{10}$; $y = -3 + \sqrt{10} \Rightarrow x = -2 + \sqrt{10}$ (0,5 đ)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}; \begin{cases} x = -2 + \sqrt{10} \\ y = -3 + \sqrt{10} \end{cases}; \begin{cases} x = -2 - \sqrt{10} \\ y = -3 - \sqrt{10} \end{cases} \quad (0,25 \text{ đ})$$

Câu 3 (5,0 điểm).

a) Đặt $P = 3a^2 + b$ ta có: $\frac{P}{3} = a^2 + \frac{b}{3} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} a\sqrt{b} \Rightarrow P \geq 2\sqrt{3}a\sqrt{b}$ (1) (1,0 đ)

Mặt khác, ta có $2ab = a^2 + b = a^2 + \frac{b}{3} + \frac{b}{3} + \frac{b}{3} \geq 4\sqrt{a^2 \frac{b^3}{3^3}}$

$$\Rightarrow 4a^2b^2 \geq 4^2 \frac{ab}{3} \sqrt{\frac{b}{3}} \Rightarrow a\sqrt{b} \geq \frac{4}{3\sqrt{3}} \quad (2) \quad (1,0 \text{ đ})$$

Từ (1) và (2) suy ra $P \geq \frac{8}{3}$ (0,25 đ)

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a^2 + b = 2ab \\ a^2 = \frac{b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$ Vậy $P \geq \frac{8}{3}$ (0,25 đ)

b) Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$, với $x, y, z > 0$.

Khi đó, điều kiện $ab + bc + ca = abc$ trở thành $x + y + z = 1$ và $P = \frac{yz}{x+1} + \frac{zx}{y+1} + \frac{yx}{z+1}$ (0,5 đ)

Dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, với mọi $x, y > 0$ (1) (0,25 đ)

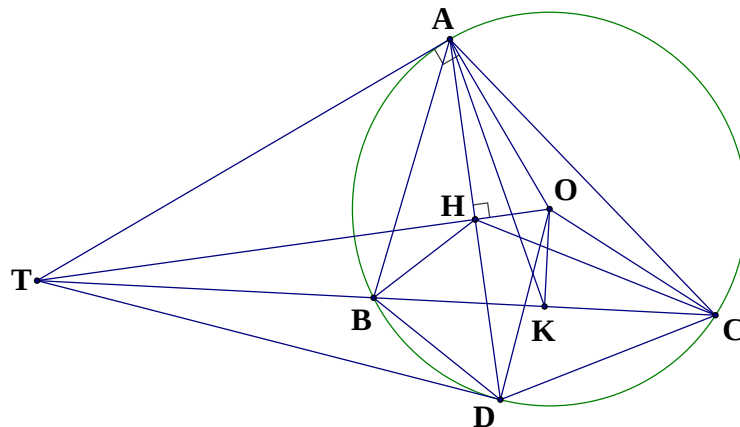
Áp dụng (1), ta có $\frac{yz}{x+1} = \frac{yz}{(x+y)+(x+z)} \leq \frac{yz}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{yz}{x+y} + \frac{yz}{x+z} \right)$ (0,5 đ)

Tương tự: $\frac{yz}{x+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{zx}{y+z} + \frac{zx}{y+x} \right), \frac{xy}{z+1} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{xy}{z+x} + \frac{xy}{z+y} \right)$ (0,5 đ)

Suy ra $P \leq \frac{1}{4} \left(\frac{yz}{x+y} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{y+z} + \frac{zx}{y+x} + \frac{xy}{z+x} + \frac{xy}{z+y} \right) = \frac{1}{4} (x + y + z) = \frac{1}{4}$ (0,5 đ)

$P = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{4}$. (0,25 đ)

Câu 4(5,0 điểm).



- a) Tam giác OAD cân tại O ,
 có OH là đường cao nên OH cũng là đường phân giác
 $\Rightarrow \triangle OAT = \triangle ODT$ (c.g.c) (0,5 đ)
 $\Rightarrow \angle ODT = \angle OAT = 90^\circ \Rightarrow OD \perp DT \Rightarrow TD$ là tiếp tuyến của (O) . (0,5 đ)
- b) Ta có: $\triangle ABT \sim \triangle CAT$ (g.g) (0,5 đ)
 $\Rightarrow \frac{AT}{CT} = \frac{BT}{AT} \Rightarrow AT^2 = TB.TC$ (1) (0,25 đ)
 Mặt khác, theo hệ thức lượng tròn tam giác vuông ta có $AT^2 = TH.TO$ (2) (0,5 đ)
 Từ (1) và (2) suy ra $TB.TC = TH.TO \Rightarrow BHOC$ là tứ giác nội tiếp (0,25 đ)
- c) Ta có $\angle TAO = \angle TKO = \angle TDO = 90^\circ$
 suy ra năm điểm T, A, O, K, D cùng thuộc một đường tròn
 $\Rightarrow \angle AKB = \angle AOT$ (cùng chắn AT). (0,25 đ)
 Mà $\angle AOT = \frac{1}{2} \angle AOD = \angle ACD$, suy ra $\angle AKB = \angle ACD$ (0,25 đ)
 Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AKC$ có: $\angle ADB = \angle ACK$ (cùng chắn AB). (3) (0,25 đ)
 Lại có $\angle KAC + \angle KCA = \angle AKB, \angle KCD + \angle KCA = \angle ACD$
 Và $\angle AKB = \angle ACD$ (chứng minh trên), suy ra $\angle KAC = \angle KCD$. (0,5 đ)
 Mà $\angle KCD = \angle BAD$ (cùng chắn BD) $\Rightarrow \angle BAD = \angle KAC$ (4)
 Từ (3) và (4) suy ra $\triangle ABD \sim \triangle AKC$ (0,25 đ)
- d) Tứ giác $BHOC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle THB = \angle OCB = \angle OBC = \angle OHC$
 Xét $\triangle THB$ và $\triangle CHO$ có: $\angle THB = \angle HOC$ (do tứ giác $BHOC$ nội tiếp); $\angle THB = \angle OHC$ (theo chứng minh trên) $\Rightarrow \triangle THB \sim \triangle CHO$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{HB}{HO} = \frac{TH}{HC} = \frac{TB}{CO} \Rightarrow \frac{HB}{HO} \cdot \frac{TH}{HC} = \frac{TB^2}{CO^2} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = \frac{TB^2}{CO^2} \cdot \frac{HO}{TH}$ (5)
 Mặt khác, ta có $\frac{HO}{TH} = \frac{HO \cdot OT}{TH \cdot OT} = \frac{OA^2}{AT^2}$ (6) (0,25 đ)
 Từ (5) và (6) suy ra $\frac{HB}{HC} = \frac{TB^2}{CO^2} \cdot \frac{OA^2}{AT^2} = \frac{TB^2}{AT^2}$
 Do $\triangle ATD \sim \triangle CAT$ nên $\frac{TB}{AT} = \frac{AB}{AC}$, suy ra $\frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$ (0,25 đ)

Chú ý: Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng vẫn cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn qui định.

----- Hết -----

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

(Đề thi gồm 02 trang)

Câu 1 (4,0 điểm):

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$, ($x \geq 0; y \geq 0; xy \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{1 + 2024^2 + \frac{2024^2}{2023^2}} - 2023 \frac{1}{2023}$; $y = 31 \frac{3}{2024}$.

Câu 2 (3,0 điểm):

a) Giải phương trình: $(x + 5)^2 - 3(4x + 7) = 32 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + y)(1 + xy) = 5xy \\ (x^2 + y^2) \cdot \frac{x^2 y^2 + 1}{x^2 y^2} = 9 \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm):

Cho Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + \frac{1}{2}$

a) Chứng minh rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.

b) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

c) Gọi A và B là giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P), tìm tập hợp các trung điểm C của đoạn thẳng AB khi m thay đổi.

Câu 4 (2,0 điểm):

Bạn Hoàng mua ba cuốn sách tham khảo cho ba môn gồm Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh hết tất cả 324 000 đồng. Biết rằng tiền mua cuốn sách Toán bằng $\frac{2}{7}$ tổng số tiền mua sách Ngữ văn và sách Tiếng Anh, tiền mua cuốn sách Tiếng Anh bằng $\frac{4}{5}$ tổng số tiền mua sách Ngữ văn và sách Toán. Hỏi bạn Hoàng đã mua mỗi cuốn sách hết bao nhiêu tiền?

Câu 5 (2,0 điểm):a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn

$$a^2b^2 + a^2 - 4a + 4(b-1)^2 - 2ab(a + 2b - 4) = 1.$$

b) Cho ba số x, y, z thỏa mãn $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$. Chứng minh rằng

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq 10.$$

Câu 6 (6,0 điểm):

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi D là một điểm bất kỳ thuộc cung nhỏ BC của đường tròn $(O; R)$, trên dây AD lấy điểm P sao cho $AP = DC$. Gọi Q là giao điểm của DA và BC .

a) Chứng minh rằng $DB \cdot DC = DA \cdot DQ$.b) Chứng minh rằng $DA = DB + DC$.c) Chứng minh rằng $\frac{DQ}{DB} + \frac{DQ}{DC} = 1$.d) Tính tổng $DA^2 + DB^2 + DC^2$ theo R .

--- HẾT ---

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu	Hướng dẫn	Thang điểm
1a) (2,0 điểm)	Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \right) : \left(1 + \frac{x + y + 2xy}{1 - xy} \right)$	
		0,5
		0,5
		0,5

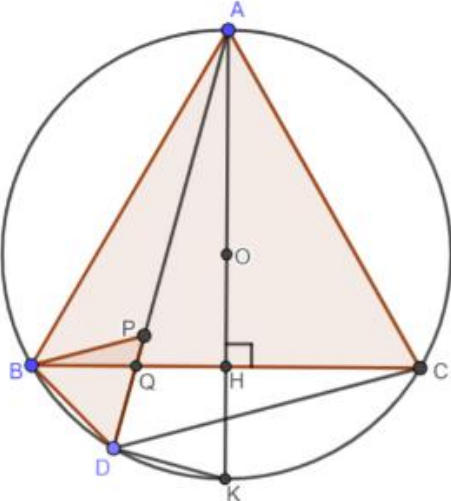
	$P = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(1 + \sqrt{xy}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})(1 - \sqrt{xy})}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy + x + y + 2xy}{1 - xy}$ $= \frac{\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y} + y\sqrt{x} + \sqrt{x} - x\sqrt{y} - \sqrt{y} + y\sqrt{x}}{1 - xy} \cdot \frac{1 - xy}{1 + x + y + xy}$ $= \frac{2(\sqrt{x} + y\sqrt{x})}{(1 + x)(1 + y)}$ $= \frac{2\sqrt{x}(1 + y)}{(1 + x)(1 + y)} = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x}$	0,5
1b) (2,0 điểm)	Khi $x = \sqrt{1 + 2024^2 + \frac{2024^2}{2023^2}} - 2023 \frac{1}{2023}$. Ta có: $2023^2 = (2024 - 1)^2 = 2024^2 - 2 \cdot 2024 + 1$ $\Rightarrow 2024^2 + 1 = 2023^2 + 2 \cdot 2024$ $\Rightarrow x = \sqrt{2023^2 + 2 \cdot 2024 + \frac{2024^2}{2023^2}} - 2023 \frac{1}{2023}$ $= \sqrt{\left(2023 + \frac{2024}{2023}\right)^2} - 2023 \frac{1}{2023}$ $= 2023 + \frac{2024}{2023} - 2023 \frac{1}{2023} = 2024 + \frac{1}{2023} - 2023 - \frac{1}{2023} = 1$ Vậy $P = \frac{2\sqrt{x}}{1 + x} = \frac{2\sqrt{1}}{1 + 1} = 1$	0,5 0,25 0,5 0,25 0,25 0,25
2a) (1,5 điểm)	a) Giải phương trình: $(x + 5)^2 - 3(4x + 7) = 32 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ $\Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 - 12x - 21 - 32 - \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 30 = 0$ Vì $x^2 - 2x + 2 \geq 1 > 0$ nên: Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ ($t \geq 0$) Phương trình trên trở thành: $t^2 - t - 30 = 0$ $\Rightarrow t_1 = 6, \quad t_2 = -5 < 0 \text{ (loại)}$ Khi đó: $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 34 = 0$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

	Giải ra được $x_1 = 1 + \sqrt{35}$; $x_2 = 1 - \sqrt{35}$	
2b) (1,5 điểm)	b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+y)(1+xy) = 5xy \\ (x^2+y^2) \cdot \frac{x^2y^2+1}{x^2y^2} = 9 \end{cases}$ Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$ $\begin{cases} (x+y)(1+xy) = 5xy \\ (x^2+y^2) \cdot \frac{x^2y^2+1}{x^2y^2} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+y)(1+xy)}{xy} = 5 \\ (x^2+y^2) \cdot \frac{x^2y^2+1}{x^2y^2} = 9 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \\ \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) = 9 \end{cases}$ Đặt $a = x + \frac{1}{x}; b = y + \frac{1}{y}$ hệ trên trở thành $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2-4=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ a.b=6 \end{cases} \text{ suy ra } a, b \text{ là nghiệm của}$ phương trình: $X^2 - 5X + 6 = 0$ giải được $X_1 = 2; X_2 = 3$ $\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ Với $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$	0,25 0,25 0,25 0,25

	Với $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 3 \\ y + \frac{1}{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ Vậy hệ có bốn nghiệm là $(x; y) = \left(1; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right); \left(1; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; 1\right); \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; 1\right)$	0,25
		0,25
3a) (1,0 điểm)	Cho Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + \frac{1}{2}$ a) Chứng minh rằng, đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m. Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d) đi qua với mọi giá trị của m. Khi đó ta có $y_0 = mx_0 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_0 \cdot m = y_0 - \frac{1}{2}$ Suy ra: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy điểm cố định mà đường thẳng (d) đi qua với mọi giá trị của m là $\left(0; \frac{1}{2}\right)$	0,25 0,25 0,25 0,25
3b) (1,0 điểm)	b) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m. Pt hoành độ giao điểm $x^2 - 2mx - 1 = 0$ Có $\Delta' = m^2 + 1$ Vì $\Delta' = m^2 + 1 \geq 1 > 0$ với $\forall m$. Nên Pt hoành độ giao điểm luôn có hai nghiệm phân biệt.	0,25 0,25 0,25

	Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.	0,25
3c) (1,0 điểm)	c) Gọi A và B là giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P), tìm tập hợp các trung điểm C của đoạn thẳng AB khi m thay đổi. Gọi A và B là giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P), tìm tập hợp các trung điểm C của đoạn thẳng AB khi m thay đổi. Gọi $C(x_C; y_C)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\begin{cases} x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ y_C = x_C^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$ Theo Viet thì $x_C = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}.2m = m$ Khi đó $y_C = x_C^2 + \frac{1}{2} = m^2 + \frac{1}{2}$ Vậy tập hợp trung điểm C của đoạn thẳng AB là các điểm thỏa mãn biểu thức $y = x^2 + \frac{1}{2}$	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 4 (2,0 điểm)	Bạn Hoàng mua ba cuốn sách tham khảo cho ba môn gồm Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh hết tất cả 324 000 đồng. Biết rằng, tiền mua cuốn sách Toán bằng $\frac{2}{7}$ tổng số tiền mua sách Ngữ văn và sách Tiếng Anh, tiền mua cuốn sách Tiếng Anh bằng $\frac{4}{5}$ tổng số tiền mua sách Ngữ văn và sách Toán. Hỏi bạn Hoàng đã mua mỗi cuốn sách hết bao nhiêu tiền? Gọi x, y, z (đồng) lần lượt là số tiền mua sách Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh ($0 < x, y, z < 324000$)	0,25

	Ta có hệ pt: $\begin{cases} x + y + z = 324000 \\ x = \frac{2}{7}(y + z) \\ z = \frac{4}{5}(x + y) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 324000 \\ 7x - 2y - 2z = 0 \\ 4x + 4y - 5z = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 72000 \\ y = 108000 \\ z = 144000 \end{cases}$ Vậy bạn Hoàng đã mua sách Toán, Ngữ văn và Tiếng Anh lần lượt là 72000 đồng, 108000 đồng, 144000 đồng	0,25 0,25 0,25 0,25 0, 5 0,25
5a) (1,0 điểm)	Tìm tất cả các cặp số nguyên (a;b) thỏa mãn $a^2b^2 + a^2 - 4a + 4(b-1)^2 - 2ab(a + 2b - 4) = 1$ Ta có: $a^2b^2 + a^2 - 4a + 4(b-1)^2 - 2ab(a + 2b - 4) = 1$ $\Leftrightarrow a^2b^2 + a^2 - 4a + 4b^2 - 8b + 4 - 2a^2b - 4ab^2 + 8ab = 1$ $\Leftrightarrow (a^2b^2 - 4ab^2 + 4b^2) + (a^2 - 4a + 4) - (2a^2b - 8ab + 8b) = 1$ $\Leftrightarrow b^2(a^2 - 4a + 4) + (a^2 - 4a + 4) - 2b(a^2 - 4a + 4) = 1$ $\Leftrightarrow (a^2 - 4a + 4)(b^2 - 2b + 1) = 1$ $\Leftrightarrow (a - 2)^2(b - 1)^2 = 1$ - Trường hợp 1: $a - 2 = b - 1 = 1 \Rightarrow (a;b) = (3;2)$ - Trường hợp 2: $a - 2 = b - 1 = -1 \Rightarrow (a;b) = (1;0)$ - Trường hợp 3: $a - 2 = -(b - 1) = 1 \Rightarrow (a;b) = (3;0)$ - Trường hợp 4: $a - 2 = -(b - 1) = -1 \Rightarrow (a;b) = (1;2)$	0,25 0,25 0,25 0,25

	Cho ba số x, y, z thỏa mãn $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$. Chứng minh rằng $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq 10.$ Với $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$ ta có: $\left(1 - \frac{x}{y} \right) \left(1 - \frac{y}{z} \right) + \left(1 - \frac{y}{x} \right) \left(1 - \frac{z}{y} \right) \geq 0$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{y}{z} - \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + 1 - \frac{z}{y} - \frac{y}{x} + \frac{z}{x} \geq 0$ $\Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \leq 2 + \frac{x}{z} + \frac{z}{x}$ 5b) (1,0 điểm) Từ giả thiết ta có: $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) =$ $= 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \right) + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq 5 + 2 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) \quad (1)$ Mặt khác: $1 \leq x \leq y \leq z \leq 2$ suy ra $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{z} \leq 1$ do đó $\left(2 - \frac{x}{z} \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{z} \right) \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{5x}{2z} + \frac{x^2}{z^2} \leq 0$ $\Leftrightarrow 1 + \frac{x^2}{z^2} \leq \frac{5x}{2z} \Leftrightarrow \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2} \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có: $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq 10$	0,25 0,25 0,25 0,25
Vẽ đúng hình (0,5 điểm)		0,5

6a) (1,0 điểm)	Chứng minh rằng $DB \cdot DC = DA \cdot DQ$ Xét $\triangle DBQ$ và $\triangle DAC$ có: $\angle DBQ = \angle DAC$ Và $\angle BDQ = \angle ADC$ Suy ra $\triangle DBQ \sim \triangle DAC$ $\frac{DB}{DA} = \frac{DQ}{DC} \Rightarrow DB \cdot DC = DA \cdot DQ \quad (1)$	0,25 0,25 0,25 0,25
6b) (1,5 điểm)	Chứng minh rằng $DA = DB + DC$ HS lập luận chứng minh được: $\triangle ABP = \triangle CBD$ (g-g) Từ đó lập luận suy ra $\angle DBP = 60^\circ$ và $\angle BDP = 60^\circ$ Suy ra $\triangle BDP$ đều $\Rightarrow DB = DP$ Suy ra $DA = DB + DC \quad (2)$	0,5 0,5 0,25 0,25
6c) (1,5 điểm)	Chứng minh rằng $\frac{DQ}{DB} + \frac{DQ}{DC} = 1$ Từ (1) suy ra: $\frac{DA \cdot DQ}{DB \cdot DC} = 1 \quad (3)$ Thay (2) vào (3) ta được: $\frac{(DB + DC) \cdot DQ}{DB \cdot DC} = 1$ $\Leftrightarrow \frac{DB \cdot DQ + DC \cdot DQ}{DB \cdot DC} = 1$ $\Leftrightarrow \frac{DQ}{DC} + \frac{DQ}{DB} = 1$	0,5 0,5 0,25 0,25
6d) (1,5 điểm)	Tính tổng $DA^2 + DB^2 + DC^2$ theo R. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), tia AH cắt $(O; R)$ tại K. HS lập luận chứng minh được: $DA^2 + DB^2 + DC^2 = DA^2 + (DB + DC)^2 - 2DB \cdot DC$ $= DA^2 + DA^2 - 2DA \cdot QD$ (vì $DB \cdot DC = DA \cdot DQ$) $= 2DA^2 - 2DA \cdot QD = 2DA \cdot (DA - QD) = 2DA \cdot QA$ Ta có $\triangle ABC$ đều $O \in AH \Rightarrow AK$ là đường kính của $(O; R)$ $\Rightarrow \triangle ADK$ vuông tại D HS lập luận chứng minh được 2 tg vuông AHQ và ADK đồng dạng (góc DAK chung) $\Rightarrow \frac{AH}{AD} = \frac{AQ}{AK} \Rightarrow 2AD \cdot AQ = 2AH \cdot AK \quad (4)$	0,25 0,25 0,25 0,25

	ΔABC đều suy ra ΔOKC đều nên $OH = KH = \frac{R}{2}$ hay $AH = \frac{3R}{2}$ Thế vào (4) ta được: $2AD.AQ = 2 \cdot \frac{3R}{2} \cdot 2R = 6R^2$ Vậy $DA^2 + DB^2 + DC^2 = 6R^2$	0,25
		0,25