

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a - 3\sqrt{a} + 6}{\sqrt{a} - 2}$ với $a > 4$.

Câu 2 (3,0 điểm)

1. Cho phương trình $x^4 - 4x^2 + m + 2 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -7$.

b) Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = 2x_1x_2x_3x_4.$$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 9 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} = 2x + y \end{cases}.$$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác tù ABC có $\angle ABC > 90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại S . Lấy điểm P thuộc miền trong tam giác OAC sao cho $SC = SP$. Đường thẳng SP cắt (O) tại hai điểm E, F (E ở giữa S và F). Các đường thẳng AP, BP cắt lại (O) lần lượt tại K, L . Chứng minh rằng:

a) Tam giác ACS đồng dạng với tam giác CBS ;

b) $APS = PBS$;

c) Tứ giác $EKL F$ là hình thang cân.

Câu 4 (1,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $A = 2^{2023} + 3m^2 + 6n - 23$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên m, n .

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) để $B = 3^{3m^2 + 6n - 22} + 4$ là một số nguyên tố.

Câu 5 (1,0 điểm). Ban đầu, trên bảng có n số nguyên dương đầu tiên được viết liên tiếp từ trái qua phải: $1, 2, 3, \dots, n-1, n$. Ta thực hiện trò chơi đổi số như sau: Mỗi lượt chơi, lấy ba số đứng liền nhau a, b, c và đổi chỗ a với c thành c, b, a . Hỏi sau hữu hạn lượt chơi như trên ta có thể thu được dãy số ngược lại $n, n-1, \dots, 2, 1$ hay không, nếu:

a) $n = 5$;

b) $n = 2024$.

-----HẾT-----

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT, NĂM 2024-2025

Môn: Toán chuyên Tin
(Hướng dẫn này có 04 trang)

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
Ta có $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$	0,25
$= \frac{15\sqrt{x}-11+(2-3\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$	0,25
$= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$	0,25
$= \frac{(\sqrt{x}-1)(-5\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}.$	0,25

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}$ với $a > 4$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
Ta có $Q = \frac{a-3\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2} = \sqrt{a}-1 + \frac{4}{\sqrt{a}-2}$	0,25
$= \left(\sqrt{a}-2 + \frac{4}{\sqrt{a}-2} \right) + 1.$	0,25
Với $a > 4$ thì $\sqrt{a}-2 > 0$. Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM (Côsi) ta được $Q \geq 2\sqrt{(\sqrt{a}-2) \cdot \frac{4}{\sqrt{a}-2}} + 1 = 5.$	0,25
$Q = 5$ chẳng hạn khi $a = 16$. Vậy min $Q = 5$.	0,25

Câu 2 (3,0 điểm)

1. Cho phương trình $x^4 - 4x^2 + m + 2 = 0$ (1), với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -7$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = 2x_1x_2x_3x_4.$$

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Với $m = -7$, ta có phương trình $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.	0,25
Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), ta được $t^2 - 4t - 5 = 0$ (*).	0,25
Giải phương trình (*) ta được $t = -1$ (loại) và $t = 5$ (thỏa mãn).	0,25
Với $t = 5$ ta được $x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$. Vậy phương trình hai nghiệm $x = \pm\sqrt{5}$.	0,25
b) Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$), ta được phương trình $t^2 - 4t + m + 2 = 0$ (**). Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm phân biệt $t_1 > 0, t_2 > 0$.	0,25
Điều này tương đương với $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (m + 2) > 0 \\ 2 > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2 \text{ (a).}$	0,25
Theo bài ra $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} + \frac{1}{x_4^2} = 2x_1 x_2 x_3 x_4 \Leftrightarrow \frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2} = 2t_1 t_2 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = (t_1 t_2)^2$ (b).	0,25
Theo Viet thì (b) $\Leftrightarrow 4 = (m + 2)^2 \Leftrightarrow m = -4$ (loại) và $m = 0$ (thỏa mãn). Vậy $m = 0$ là giá trị duy nhất cần tìm.	0,25

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 9 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} = 2x + y \end{cases}.$$

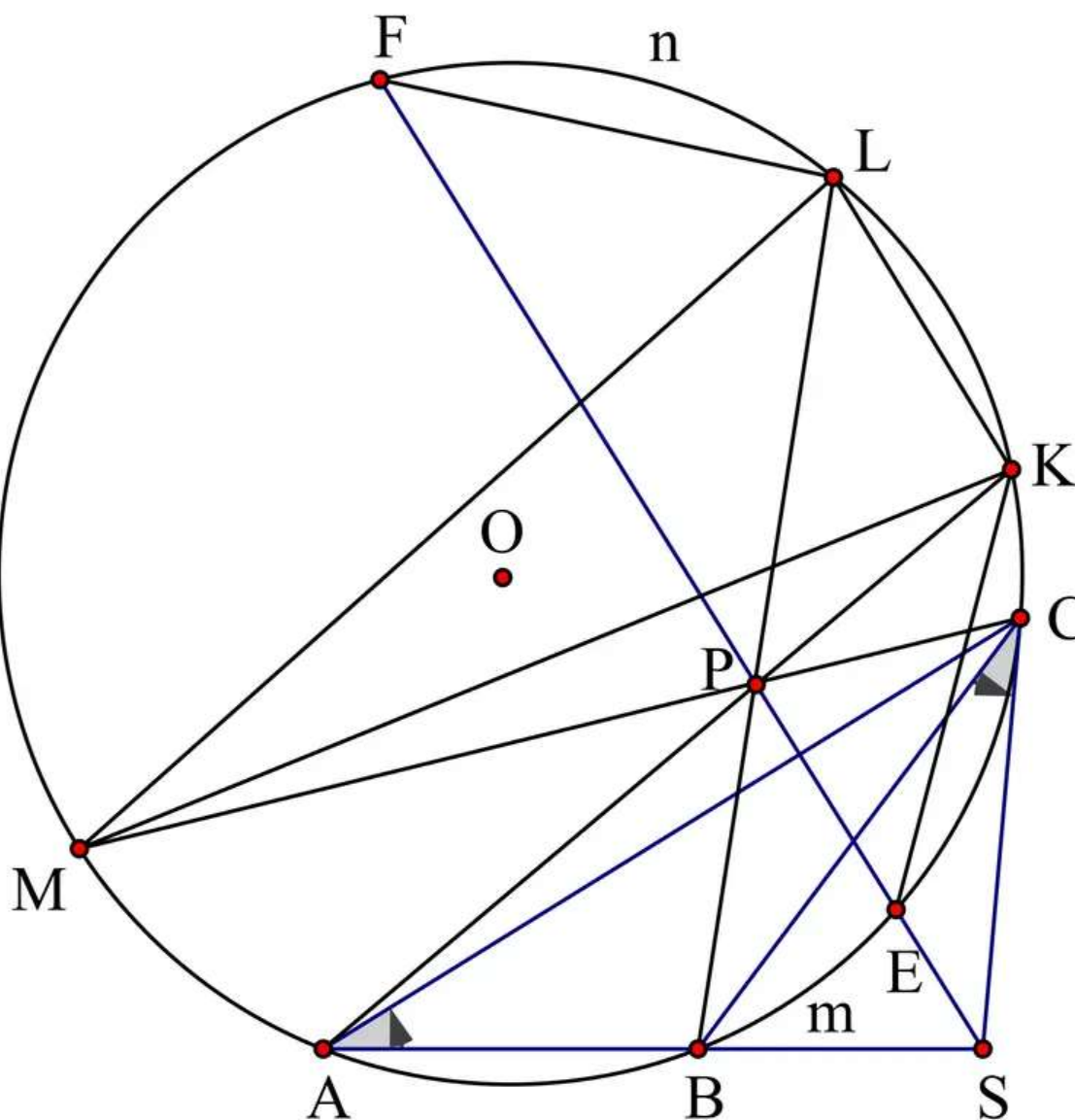
Hướng dẫn chấm	Điểm
Điều kiện xác định: $x^2 - y + 3 \geq 0$ (*). Ta có $2x^2 + y^2 + 3xy - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + y - 3)(2x + y + 3) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$	0,25
Với $y + x - 3 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 3$, thay vào phương trình $\sqrt{x^2 - y + 3} = 2x + y$ ta được $\sqrt{x^2 + x} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 + x = (x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = -\frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{5} \Rightarrow y = \frac{24}{5}.$	0,25
Với $2x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x + y = -3$, thay vào phương trình $\sqrt{x^2 - y + 3} = 2x + y$ ta được $\sqrt{x^2 + 2x + 3} = -3$, vô nghiệm.	0,25
Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = -\frac{9}{5} \\ y = \frac{24}{5} \end{cases}.$	0,25

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác tù ABC có $\angle ABC > 90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại S . Lấy điểm P thuộc miền trong tam giác OAC sao cho $SC = SP$. Đường thẳng SP cắt (O) tại hai điểm E, F (E ở giữa S và F). Các đường thẳng AP, BP cắt lại (O) lần lượt tại K, L . Chứng minh rằng:

a) Tam giác ACS đồng dạng với tam giác CBS ;

b) $\angle APS = \angle PBS$;

c) Tứ giác $EKL F$ là hình thang cân.

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Ta có $\angle CAS = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{CEB}$ (a). 	0,25
Mặt khác $\angle BCS = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{CEB}$ (b).	0,25
Từ (a) và (b) suy ra $\angle CAS = \angle CBS$ (1).	0,25
Từ (1) và $\angle ASC = \angle BSC$ suy ra hai tam giác ACS và CBS đồng dạng.	0,25
b) Từ a) suy ra $\frac{CS}{BS} = \frac{AS}{CS} \Rightarrow SC^2 = SB.SA$ (c).	0,25
Vì $SC = SP$ nên (c) $\Rightarrow SP^2 = SB.SA \Rightarrow \frac{SP}{SB} = \frac{SA}{SP}$ (d).	0,25
Từ (d) và $\angle PSA = \angle BSP$ suy ra $\triangle PSA \sim \triangle BSP$.	0,25
Do đó $\angle APS = \angle PBS$.	0,25
c) Ta có $\angle BPS = \frac{1}{2}(\text{sđ} \widehat{BmE} + \text{sđ} \widehat{LnF})$ và $\angle PAS = \frac{1}{2}(\text{sđ} \widehat{BmE} + \text{sđ} \widehat{Eck})$ (e).	0,25
Vì $\triangle PSA \sim \triangle BSP$ nên $\angle BPS = \angle PAS$. Kết hợp với (e) suy ra $\text{sđ} \widehat{LnF} = \text{sđ} \widehat{Eck}$ (f).	0,25

Từ (f) suy ra $LFE + FLK = \frac{1}{2} \text{sđ} LKE + \frac{1}{2} \text{sđ} FAK = \frac{1}{2} (\text{sđ} LnF + \text{sđ} LtK) + \frac{1}{2} \text{sđ} FAK = 180^\circ \Rightarrow LK \parallel EF.$	0,25
Do đó $EKLF$ là hình thang. Hơn nữa $\text{sđ} LnF = \text{sđ} ECK \Rightarrow FL = KE \Rightarrow EKLF$ là hình thang cân.	0,25

Câu 4 (1,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $A = 2^{2023} + 3m^2 + 6n - 23$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên m, n .

Hướng dẫn chấm	Điểm
Ta có $2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2023} \equiv -1 \pmod{3}$.	0,25
Suy ra $A = 2^{2023} + 3m^2 + 6n - 23 \equiv -1 - 23 \equiv 0 \pmod{3}$.	0,25

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) để $B = 3^{3m^2+6n-22} + 4$ là một số nguyên tố.

Hướng dẫn chấm	Điểm
Nếu $X = 3m^2 + 6n - 22 < 0$ thì $B \notin \mathbb{Z}$, do đó $X = 3m^2 + 6n - 22 \geq 0$. Ta có $X = 3(m^2 + 2n - 8) + 2 \Rightarrow X \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow X = 3k + 2 (k \in \mathbb{N})$. Do đó $B = 3^{3k+2} + 4 = 9 \cdot 27^k + 4 \equiv 9 \cdot 1 + 4 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow B = 13.$	0,25
Từ $B = 13$ suy ra $k = 0 \Rightarrow 3m^2 + 6n - 22 = 2 \Rightarrow m^2 + 2n - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m^2 \leq 8 \\ m \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 = 0 \\ m^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}.$ Vậy cặp số cần tìm là $(0, 4), (2, 2)$.	0,25

Câu 5 (1,0 điểm). Ban đầu, trên bảng có n số nguyên dương đầu tiên được viết liên tiếp từ trái qua phải: $1, 2, 3, \dots, n-1, n$. Ta thực hiện trò chơi đổi số như sau: Mỗi lượt chơi, lấy ba số đứng liền nhau a, b, c và đổi chỗ a với c thành c, b, a . Hỏi sau hữu hạn lượt chơi như trên ta có thể thu được dãy số ngược lại $n, n-1, \dots, 2, 1$ hay không, nếu:

a) $n = 5$;

b) $n = 2024$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Với $n = 5$ ta thực hiện các bước biến đổi như sau: 1 2 3 4 5 1 4 3 2 5 3 4 1 2 5 3 4 5 2 1 5 4 3 2 1	0,5
b) Với $n = 2024$: Ta thấy rằng với cách đổi như trên thì các số lẻ luôn ở vị trí lẻ còn số chẵn luôn ở vị trí chẵn.	0,25
Ban đầu số 2024 ở vị trí chẵn, do đó nó không thể chuyển về vị trí đầu tiên trong dãy số $2024, 2023, \dots, 2, 1$ được.	0,25

-----Hết-----

Ghi chú: Nếu thí sinh làm bài theo cách khác thì vẫn cho điểm theo các phần đúng tương ứng.