

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT VÒNG TỈNH NĂM HỌC 2022 - 2023

Ngày thi: 12 tháng 10 năm 2022 (Buổi thi thứ nhất)

Môn thi: TOÁN-Lớp: 12 THPT

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang, thí sinh không phải chép đề vào giấy thi)

Câu 1: (5,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương thoả mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{2+bc} + \frac{b^2}{2+ca} + \frac{c^2}{2+ab} \geq \frac{6}{5}$$

Câu 2: (5,0 điểm)

Tìm các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 2022$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2023$ và thoả mãn $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot \cos y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 3: (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC ($AB > AC, BC > AC$) có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC lần lượt tại D, E và F . Một đường thẳng d đi qua E và song song với AB cắt CD tại P , cắt FD tại Q . Chứng minh P là trung điểm của EQ .

Câu 4: (5,0 điểm)

Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số, chia hết cho 11 sao cho thương số của phép chia số đó cho 11 bằng tổng bình phương của các chữ số của nó.

--- Hết ---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2022-2023**

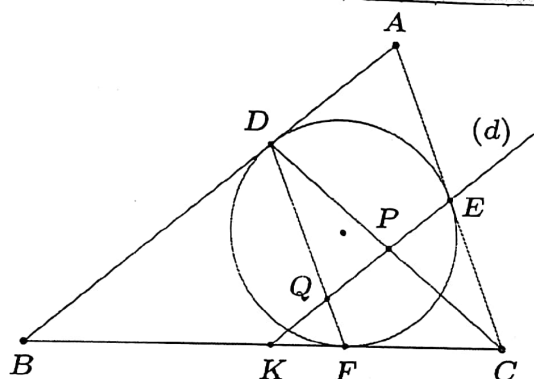
**HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN: TOÁN-LỚP 12 THPT
(BUỔI THI THỨ NHẤT)**

Câu/Ý	Nội dung diễn đạt	Thang điểm	Ghi chú
1	Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a^2}{2+bc} + \frac{b^2}{2+ca} + \frac{c^2}{2+ab} \geq \frac{6}{5}$	5,0	
	• Ta có $\frac{a^2}{2+bc} \geq \frac{a^2}{2+\frac{b^2+c^2}{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $b = c$	0,5.	
	$\geq \frac{2a^2}{4+b^2+c^2}$	0,25	
	Suy ra $\frac{a^2}{2+bc} \geq \frac{2a^2}{8-a^2}$	0,25	
	• $\frac{b^2}{2+ca} \geq \frac{b^2}{2+\frac{c^2+a^2}{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $c = a$	0,5	
	$\geq \frac{2b^2}{4+c^2+a^2}$	0,25	
	Suy ra $\frac{b^2}{2+ca} \geq \frac{2b^2}{8-b^2}$	0,25	
	• $\frac{c^2}{2+ab} \geq \frac{c^2}{2+\frac{a^2+b^2}{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$	0,5	
	$\geq \frac{2c^2}{4+a^2+b^2}$	0,25	
	Suy ra $\frac{c^2}{2+ba} \geq \frac{2c^2}{8-c^2}$	0,25	
	$\frac{a^2}{2+bc} + \frac{b^2}{2+ca} + \frac{c^2}{2+ab} \geq \frac{2a^2}{8-a^2} + \frac{2b^2}{8-b^2} + \frac{2c^2}{8-c^2}$ $\geq \frac{2a^2}{8-a^2} + 2 + \frac{2b^2}{8-b^2} + 2 + \frac{2c^2}{8-c^2} + 2 - 6$	0,5	
	$\geq -6 + 16\left(\frac{1}{8-a^2} + \frac{1}{8-b^2} + \frac{1}{8-c^2}\right)$	0,25	
	• Do $\frac{1}{8-a^2} + \frac{1}{8-b^2} + \frac{1}{8-c^2} \geq \frac{9}{24-a^2-b^2-c^2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$	0,5	

	Suy ra $\frac{1}{8-a^2} + \frac{1}{8-b^2} + \frac{1}{8-c^2} \geq \frac{9}{20}$	0,25	
	Do đó $\frac{a^2}{2+bc} + \frac{b^2}{2+ca} + \frac{c^2}{2+ab} \geq -6 + 16 \cdot \frac{9}{20}$	0,25	
	$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2+bc} + \frac{b^2}{2+ca} + \frac{c^2}{2+ab} \geq \frac{6}{5}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0,25	
2	Tìm các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(0)=2022$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2023$ và thoả mãn $f(x+y)+f(x-y)=2f(x).\cos y, \forall x,y \in \mathbb{R}. (*)$	5,0	
	• Cho $x=\frac{\pi}{2}, y=t-\frac{\pi}{2}, t \in \mathbb{R}$ thay vào (*). Ta có $f(t)+f(\pi-t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right).\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$	0,5	
	$\Leftrightarrow f(t)+f(\pi-t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin t, t \in \mathbb{R} \quad (1)$	0,5	
	• Cho $x=t-\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}, t \in \mathbb{R}$ thay vào (*). Ta có $f(t)+f(t-\pi)=2f\left(t-\frac{\pi}{2}\right).\cos\frac{\pi}{2}, t \in \mathbb{R}$	0,5	
	$\Leftrightarrow f(t)+f(t-\pi)=0, t \in \mathbb{R} \quad (2)$	0,5	
	• Từ (1) và (2) ta có $2f(t)+f(t-\pi)+f(\pi-t)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin t, t \in \mathbb{R}$	0,5	
	• Cho $x=0, y=t-\pi, t \in \mathbb{R}$ thay vào (*). Ta có $f(t-\pi)+f(\pi-t)=2f(0).\cos(t-\pi), t \in \mathbb{R}$	0,5	
	$\Leftrightarrow f(t-\pi)+f(\pi-t)=-2f(0).\cos t, t \in \mathbb{R}$	0,5	
	Từ đó ta có: $2f(t)-2f(0).\cos t=2f\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin t, t \in \mathbb{R}$	0,25	
	$\Leftrightarrow f(t)=f\left(\frac{\pi}{2}\right).\sin t+f(0).\cos t, t \in \mathbb{R}$	0,25	
	$=2023.\sin t+2022.\cos t, t \in \mathbb{R}$	0,25	
	Suy ra $f(x)=2023.\sin x+2022.\cos x, x \in \mathbb{R}$	0,25	
	• Thử lại: Thay $f(x)=2023.\sin x+2022.\cos x, x \in \mathbb{R}$ vào (*) ta thấy (*) thoả mãn.	0,25	
	• Vậy $f(x)=2023.\sin x+2022.\cos x, x \in \mathbb{R}$	0,25	

Cho tam giác ABC ($AB > AC, BC > AC$) có đường tròn nội tiếp tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC lần lượt tại D, E và F . Một đường thẳng d đi qua E và song song với AB cắt CD tại P , cắt FD tại Q . Chứng minh P là trung điểm của EQ .

5,0



Đặt K là giao điểm của d với BC , $BC = a, AC = b, AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

• Ta có $AD = AE = p - a$

0,25

$BD = BF = p - b$

0,25

$CE = CF = p - c$

0,25

• Do $EP \parallel AD$ nên $\frac{EP}{AD} = \frac{CE}{CA}$.

0,25

Suy ra $EP = \frac{CE}{CA} \cdot AD = \frac{(p-c)(p-a)}{b}$ (1)

0,25

• Do $EK \parallel AB$ nên $\frac{EK}{AB} = \frac{CE}{CA}$.

0,25

Suy ra $EK = \frac{CE}{CA} \cdot AB = \frac{c(p-c)}{b}$

0,25

• Do $PK = EK - EP$

0,25

$$= \frac{(p-c)(c-p+a)}{b}$$

0,25

• Do $EK \parallel AB$ nên $\frac{CK}{CB} = \frac{CE}{CA}$.

0,25

Suy ra $CK = \frac{CE}{CA} \cdot CB = \frac{a(p-c)}{b}$

0,25

• $\triangle BDF$ cân tại B nên $\widehat{BFD} = \widehat{BDF}$ và $\widehat{BDF} = \widehat{KQF}$ nên $\widehat{KQF} = \widehat{BFD}$.

0,25

Suy ra $\triangle KQF$ cân tại K . Do đó $KQ = KF$

0,25

Ta có $KF = CK - CF$

0,25

$$= \frac{(p-c)(a-b)}{b}$$

0,25

Suy ra $KQ = \frac{(p-c)(a-b)}{b}$

0,25

	• Do $PQ = PK - KQ$	0,25	
	$= \frac{(p-c)(c-p+a)}{b} - \frac{(p-c)(a-b)}{b}$	0,25	
	$= \frac{(p-c)(p-a)}{b} \quad (2)$	0,25	
	• Từ (1) và (2) suy ra $EP = PQ$. P là trung điểm của PQ .	0,25	
4	Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số, chia hết cho 11 sao cho thương số của phép chia số đó cho 11 bằng tổng bình phương của các chữ số của nó.	5,0	
	• Đặt $\overline{abc}$ là số cần tìm, với $a; b; c \in \mathbb{N}$ và $0 < a \leq 9; 0 \leq b; c \leq 9$	0,25	
	• Do giả thiết ta có $100a + 10b + c = 11(a^2 + b^2 + c^2)$ $\Leftrightarrow 99a + 11b + (a + c - b) = 11(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$	0,25	
	nên $a + c - b$ chia hết cho 11.	0,25	
	• Do $-8 \leq a + c - b \leq 18$ nên $a + c - b = 0$ hoặc $a + c - b = 11$	0,25	
	* $a + c - b = 0 \Leftrightarrow b = a + c$. Khi đó (1) thành $9a + b = a^2 + b^2 + c^2$	0,25	
	$\Leftrightarrow 9a + a + c = a^2 + (a + c)^2 + c^2 \Leftrightarrow 10a + c = 2(a^2 + ac + c^2)$	0,25	
	Suy ra c chia hết cho 2 hay $c = 2n$ với $n \in \mathbb{N}$.	0,25	
	Với $c = 2n$. Ta có $10a + 2n = 2(a^2 + 2na + 4n^2)$ $\Leftrightarrow a^2 - (2n - 5)a + 4n^2 - n = 0$	0,25	
	• Điều kiện $\Delta = -12n^2 - 16n + 25 \geq 0$	0,25	
	$\Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{91}}{6} \leq n \leq \frac{-4 + \sqrt{91}}{6}$. Vậy $n = 0$	0,25	
	• Với $n = 0$. Ta có $a = b = 5, c = 0$.	0,25	
	• Vậy số cần tìm là 550.	0,25	
	* $a + c - b = 11 \Leftrightarrow b = a + c - 11$. Khi đó (1) thành $9a + b + 1 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2c^2 + 2ac - 32a - 23c + 131 = 0$.	0,25	
	Suy ra c là số lẻ hay $c = 2n + 1$ với $n \in \mathbb{N}$.	0,25	
	• Với $c = 2n + 1$. Ta có $\Leftrightarrow 2a^2 + 2(2n + 1)^2 + 2a(2n + 1) - 32a - 23(2n + 1) + 131 = 0$ $\Leftrightarrow a^2 + (2n - 15)a + 4n^2 - 19n + 55 = 0$	0,25	
	• Điều kiện $\Delta = -12n^2 + 16n + 5 \geq 0$	0,25	
	$\Leftrightarrow \frac{4 - \sqrt{31}}{6} \leq n \leq \frac{4 + \sqrt{31}}{6}$. Vậy $n = 0, n = 1$	0,25	
	• Với $n = 0$. Ta có $c = 1, a = b - 10 < 0$ (vô lý)	0,25	
	• Với $n = 1$. Ta có $c = 3, a = 8, b = 0$.	0,25	
	Suy ra số cần tìm là 803. Vậy có 2 số cần tìm là 550 và 803.	0,25	

-- Hết ---