

Hướng dẫn giải : TOÁN CHUYÊN TỈNH BÌNH DƯƠNG
NĂM HỌC 2021-2022

Câu 1

a)

$$P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} - \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}} = \frac{|\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{\frac{1}{2}}(|\sqrt{2x-1}+1| - |\sqrt{2x-1}-1|)}$$

$$\text{Ta có } x \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1$$

$$\text{Do đó } P = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x-1}+1 - \sqrt{2x-1}-1} = \sqrt{2(x-1)}$$

b)

$$\text{Ta có } (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^5 + \frac{1}{x^5}) = x^7 + \frac{1}{x^7} + x^3 + \frac{1}{x^3} \Rightarrow x^7 + \frac{1}{x^7} = 7(x^5 + \frac{1}{x^5}) - (x^3 + \frac{1}{x^3}) \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có: } (x^2 + \frac{1}{x^2})(x^3 + \frac{1}{x^3}) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^5 + \frac{1}{x^5} = 7(x^3 + \frac{1}{x^3}) - (x + \frac{1}{x}) \quad (2)$$

$$(x^2 + \frac{1}{x^2})(x + \frac{1}{x}) = x^3 + \frac{1}{x^3} + x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 6(x + \frac{1}{x}) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) Ta có:

$$x^7 + \frac{1}{x^7} = 7[7(x^3 + \frac{1}{x^3}) - (x + \frac{1}{x})] - 6(x + \frac{1}{x}) = 281(x + \frac{1}{x})$$

$$\text{Ta lại có: } (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9 \Rightarrow (x + \frac{1}{x}) = \pm 3$$

$$\text{Mà } x \text{ là số nguyên dương nên } (x + \frac{1}{x}) > 0 \text{ Nên } (x + \frac{1}{x}) = 3$$

$$\text{Vậy } x^7 + \frac{1}{x^7} = 843$$

Câu 2:

a)

Phương trình đã cho tương đương với

$$c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$$

Phương trình trên có biệt số $\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 4(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) < 0$

b)

Đkxđ: $x \geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$[(x^2 - x + 1) - 5(x - 2)]\sqrt{x^2 - x + 1} = 2[(x^2 - x + 1 - 3(x - 2))]\sqrt{x - 2}$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 - x + 1}$, $b = \sqrt{x - 2}$. ($a, b \geq 0$).

Phương trình trở thành

$$a^3 - 2a^2b - 5ab^2 + 6b^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + 2b)(a - 3b)(a - b) = 0$$

- TH1: $a = -2b$ (vô lý vì lúc này $x^2 - x + 1 = x - 2 = 0$ (vô nghiệm))

- TH2: $a = b$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x - 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = -2 \text{ (vô nghiệm)}$$

- TH3: $a = 3b$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 9(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 19 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 - \sqrt{6} \text{ (nhận)}$$

$$x = 5 + \sqrt{6} \text{ (nhận)}$$

Vậy $x = 5 \pm \sqrt{6}$

Câu 3:

a)

Điều kiện để cho tương đương với

$$b = a + c = ac.$$

$$\Rightarrow ac - a - c + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(c - 1) = 1$$

Vì $a, c \in \mathbb{Z}$ và $c > 0$ nên ta phải có $a - 1 = c - 1 = 1$, hay $a = c = 2$.

Điều này dẫn tới $b = 4$.

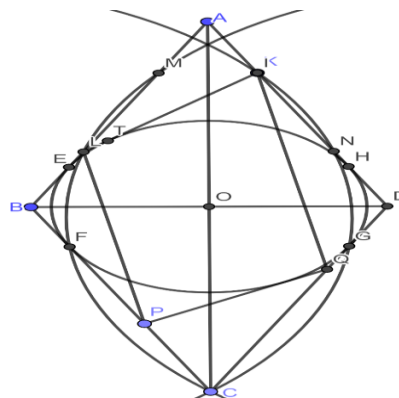
Ta có $a + b + c = 8 = 2^3$, là một số lập phương. Vậy ta có đpcm.

b)

Bất đẳng thức đề cho tương đương với

$$10x^2 + 10y^2 + z^2 \geq 4(xy + yz + xz)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{12}} + \frac{y^2}{\frac{1}{12}} + \frac{z^2}{\frac{1}{3}} \geq 2(x+y+z)^2 \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{12}} + \frac{y^2}{\frac{1}{12}} + \frac{z^2}{\frac{1}{3}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{\frac{1}{2}} = 2(x+y+z)^2$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{4}{3} \vee x = y = \frac{1}{3}.$$

$$\angle KLO = \angle OLB \quad (1)$$

Do đó $\Delta KLC \sim \Delta OLB \Rightarrow \angle OKL = \angle BOL = \angle OKD$

Dễ thấy ΔABD cân tại A $\Rightarrow \angle OBL = \angle ODK$

Xét ΔBLO và ΔDOK : $\angle OBL = \angle ODK$

$$\angle OKL = \angle OKD$$

Do đó $\Delta BLO \sim \Delta DOK \Rightarrow \frac{BL}{OD} = \frac{OB}{DK} \Rightarrow BL \cdot DK = OB \cdot OD = OB^2$ (do ABCD là hình bình hành) (2)

b)

Ta có: MLFC nội tiếp $\Rightarrow BL \cdot BM = BF \cdot BC = OB^2$ (Hệ thức lượng) (3)

$\Rightarrow \frac{BL}{BO} = \frac{BO}{BM}$ Mà $\angle OBM$ chung nên $\Delta BLO \sim \Delta BOM$

$$\Rightarrow \angle MOB = \angle BLO \text{ (4)}$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow DK = BM$

Lại có: $OB = OD$ và $\angle OBM = \angle ODK$

Do đó $\Delta BMO \sim \Delta DKO \Rightarrow OM = OK$ và $\angle BOM = \angle DOK$

Lại có $AB = AC$ nên $AM = AK \Rightarrow \Delta AMK \sim \Delta ABC \Rightarrow MK \parallel BC$

$$\Rightarrow \angle KMO = \angle MOB \text{ (5)}$$

Từ (1), (4) và (5) ta có: $\angle KMO = \angle KLO \Rightarrow KMLN$ nội tiếp (w).

Chúng minh tương tự ta có: $KMON$ nội tiếp (w)

Do đó K, M, L, N thuộc đường tròn (w).

c)

Dễ dàng chứng minh: $\Delta BLP \sim \Delta DQK$

$$\Rightarrow \frac{BL}{DQ} = \frac{BP}{DK} \Rightarrow BP \cdot DQ = BL \cdot DK \text{ (6)}$$

$$\text{Từ (2) và (6)} \Rightarrow BP \cdot DQ = OB^2 \Rightarrow \frac{BP}{BO} = \frac{BO}{DQ}$$

Lại có: $\angle BOP = \angle BLO = \angle BOM = \angle DOK = \angle DOQ$

Do đó $\triangle BPO \sim \triangle DOQ$

Vẽ tiếp tuyến PS của (O), ta cần chứng minh $S \equiv Q$

Tương tự như trên ta chứng minh được $\triangle BPO \sim \triangle DOS$

Do đó $\triangle DOS \sim \triangle DOQ \Rightarrow \frac{DO}{DO} = \frac{DS}{DQ} \Rightarrow DS = DQ \Rightarrow S \equiv Q$.

Vậy ta có đpcm.