

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM 2023-2024
Môn: Toán THPT

NGÀY THI THỨ NHẤT: 14.9.2023

Câu 1 (5,0 điểm). Cho hai số thực a, b thoả mãn: $0 < a \leq 1$ và $0 < b \leq \frac{3}{2}$. Xét các dãy số thực

$$(x_n), (y_n) \text{ xác định bởi: } \begin{cases} x_1 = y_1 > 0, x_2 = y_2 > 0 \\ 4x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \\ 4y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{3}{2}y_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Chứng minh rằng $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Hướng dẫn chấm	Điểm
Đặt $x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (*). Với $n = 1, 2$ thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng đến $n = k, k \geq 2$. Vì dãy (x_n) dương nên $4x_{k+1} \leq x_k + \frac{3}{2}x_{k-1}$.	1,0
Theo giả thiết quy nạp thì $4x_{k+1} \leq y_k + \frac{3}{2}y_{k-1} = 4y_{k+1} \Rightarrow x_{k+1} \leq y_{k+1}$. Vậy (*) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (*) đúng.	1,0
Xét phương trình đặc trưng của dãy (y_n) : $4\lambda^2 - \lambda - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$. Suy ra $y_n = C_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + C_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*; C_1, C_2$ là hằng số.	1,0
Vì $\left -\frac{1}{2}\right , \frac{3}{4} < 1$ nên $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Suy ra $\lim y_n = 0$.	1,0
Theo trên thì $0 < x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Kết hợp với $\lim y_n = 0$ suy ra $\lim x_n = 0$.	1,0

Câu 2 (5,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị của $a \in \mathbb{R}^*$ để tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + ay; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn chấm	Điểm
Giả sử $a \in \mathbb{R}^*$ thoả mãn giả thiết: Tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x + y + f(y)) = f(f(x)) + ay; \forall x, y \in \mathbb{R}$ (1). Khi đó $f(y + x + f(x)) = f(f(y)) + ax; \forall x, y \in \mathbb{R}$ (2).	1,0
Nếu $f(x) = f(y)$ thì từ (1) và (2) suy ra $ax = ay \Rightarrow x = y$. Vậy f là đơn ánh.	1,0
Cho $y = 0$ ta được $f(x + f(0)) = f(f(x)); \forall x \in \mathbb{R}$ (3). Do f là đơn ánh nên (3) $\Rightarrow f(x) = x + f(0) \Rightarrow f(x) = x + c, \forall x \in \mathbb{R}, c$ là hằng số.	1,0

Thay $f(x) = x + c$ vào (1) ta được $2y = ay, \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 2$.	1,0
Với $a = 2$ thì hàm số $f(x) = x + c, \forall x \in \mathbb{R}$ thỏa mãn (1). Vậy $a = 2$ là tất cả các giá trị cần tìm.	1,0

Câu 3 (5,0 điểm). Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{24}$. Mỗi đỉnh của đa giác $A_1A_2...A_{24}$ được gán một trong các số $1, 2, 3, ..., 11$. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật $A_iA_jA_kA_l$ thỏa mãn $m_i + m_j = m_k + m_l$, trong đó m_i, m_j, m_k, m_l lần lượt là các số gán với các đỉnh A_i, A_j, A_k, A_l .

Hướng dẫn chấm	Điểm
Giả sử đa giác đều $A_1A_2...A_{24}$ nội tiếp đường tròn (C) . Khi đó (C) có đúng 12 đường kính $A_1A_{13}, A_2A_{14}, ..., A_{12}A_{24}$. Ta gán cho đường kính A_xA_{x+12} số $ m_{x+12} - m_x $. Do $m_x, m_{x+12} \in \{1, 2, ..., 11\}$ nên $0 \leq m_{x+12} - m_x \leq 10$.	1,0
Như vậy mỗi một trong 12 đường kính $A_1A_{13}, A_2A_{14}, ..., A_{12}A_{24}$ tương ứng với một trong các số $0, 1, ..., 10$. Theo Nguyên lý Dirichlet, có ít nhất hai đường kính được đặt tương ứng với cùng một số.	1,0
Không mất tổng quát, giả sử đó là đường kính A_xA_{x+12}, A_yA_{y+12} ($1 \leq x < y \leq 12$). Khi đó $A_x, A_y, A_{x+12}, A_{y+12}$ là 4 đỉnh của một hình chữ nhật.	1,0
Mặt khác $ m_{x+12} - m_x = m_{y+12} - m_y \Leftrightarrow \begin{cases} m_{x+12} + m_y = m_{y+12} + m_x & (a) \\ m_{x+12} + m_{y+12} = m_x + m_y & (b) \end{cases}$.	1,0
Nếu (a) xảy ra thì chọn $A_i \equiv A_y, A_j \equiv A_{x+12}, A_k \equiv A_{y+12}, A_l \equiv A_x \Rightarrow$ (đpcm). Nếu (b) xảy ra thì chọn $A_i \equiv A_x, A_j \equiv A_y, A_k \equiv A_{x+12}, A_l \equiv A_{y+12} \Rightarrow$ (đpcm).	1,0

Câu 4 (5,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi:
$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng u_n chia hết cho 5 khi và chỉ khi n chia hết cho 5.

b) Tìm tất cả các giá trị của n để u_n chia hết cho 5^{2023} .

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Ta có $u_{n+5} = 305u_{n+1} + 72u_n$. Suy ra $u_{n+5} : 5 \Leftrightarrow u_n : 5$ (1).	1,0
Vì $u_1, u_2, u_3, u_4 \not\vdots 5$ và $u_0 \vdots 5$ nên từ (1) suy ra $u_n \vdots 5 \Leftrightarrow n \vdots 5$ (2).	1,0
b) Mặt khác $u_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[(2 + \sqrt{5})^n - (2 - \sqrt{5})^n \right], \forall n \in \mathbb{N}$ (3).	0,5
Đặt $a = (2 + \sqrt{5})^n, b = (2 - \sqrt{5})^n$. Suy ra $\begin{cases} ab = (-1)^n \\ a - b = 2\sqrt{5}u_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$ (4).	0,5
Từ (1), (3), (4) suy ra $u_{5n} = \frac{1}{2\sqrt{5}} (a^5 - b^5) = u_n (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$	1,0

$= u_n \left((a-b)^4 + 5ab(a-b)^2 + 5a^2b^2 \right) = u_n \left(400u_n^4 + 100.(-1)^n .u_n^2 + 5 \right).$ Do đó $u_{5n} = 5u_n \left(80u_n^4 + 20.(-1)^n .u_n^2 + 1 \right) \Rightarrow u_{5n} = 5u_n.A_n$, với $\gcd(A_n, 5) = 1$ (5).	
Từ (2) suy ra: Nếu $u_n : 5^{2023}$ thì $n : 5 \Rightarrow n = 5^k.m$, với $k, m \in \mathbb{N}^*$, $\gcd(m, 5) = 1$. Khi đó $u_n = u_{5^k.m} = 5^k.B_n$, với $\gcd(B_n, 5) = 1$. Vậy $u_n : 5^{2023} \Leftrightarrow 5^k.B_n : 5^{2023} \Leftrightarrow 5^k : 5^{2023} \Leftrightarrow n : 5^{2023}.$	1,0

-----Hết-----

NGÀY THI THỨ HAI: 15.9.2023

Câu 5 (6,0 điểm). Một xâu nhị phân độ dài n ($n \in \mathbb{N}^*$) là một dãy gồm n chữ số 0 hoặc 1 xếp liên tiếp nhau. Hai xâu nhị phân $a_1a_2...a_n$ và $b_1b_2...b_n$ bằng nhau nếu $a_i = b_i, \forall i = \overline{1, n}$.

a) Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 2024 và chứa đúng 1000 chữ số 0 ?

b) Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 2024 và chứa đúng hai xâu con 01 ?

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Số xâu nhị phân có độ dài 2024 và chứa đúng 1000 chữ số 0 bằng số cách chọn 1000 vị trí cho chữ số 0 trong 2024 vị trí của xâu $a_1a_2...a_{2024}$. Suy ra số xâu nhị phân có độ dài 2024 và chứa đúng 1000 chữ số 0 bằng C_{2024}^{1000} .	1,5
b) Mỗi xâu nhị phân có độ dài 2024 và chứa đúng hai xâu con 01 chỉ có thể thuộc một trong các trường hợp sau: TH1: Xâu có dạng $A_1B_1A_2B_2A_3$, trong đó A_1 là một xâu nhị phân chứa toàn số 1 và có $x_1 \geq 0$ chữ số 1; A_2, A_3 là các xâu nhị phân chứa toàn chữ số 1 và có $x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$ chữ số 1; B_1, B_2 là các xâu nhị phân chứa toàn chữ số 0 và có $x_4 \geq 1, x_5 \geq 1$ chữ số 0.	1,0
Ta có phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2024 \\ x_1 \in \mathbb{N} \\ x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (1).$ Đặt $y_1 = x_1, y_i = x_i - 1 (\forall i = \overline{2, 5})$, ta được $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 2020 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (a).$ Số các xâu có dạng $A_1B_1A_2B_2A_3$ = số nghiệm của (1) = số nghiệm của (a) và bằng C_{2024}^4 .	1,0
TH2: Xâu có dạng $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ trong đó A_1 là một xâu nhị phân chứa toàn chữ số 1 và có $x_1 \geq 0$ chữ số 1; A_2, A_3 là các xâu nhị phân chứa toàn chữ số 1 và có $x_2 \geq 1, x_3 \geq 1$ chữ số 1; B_1, B_2, B_3 là các xâu nhị phân chứa toàn chữ số 0 và có $x_4 \geq 1, x_5 \geq 1, x_6 \geq 1$ chữ số 0.	1,0
Ta có phương trình $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2024 \\ x_1 \in \mathbb{N} \\ x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (2).$ Đặt $y_1 = x_1, y_i = x_i - 1 (\forall i = \overline{2, 6})$, ta được $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 2019 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (b).$ Số các xâu có dạng $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ = số nghiệm của (2) = số nghiệm của (b) và bằng C_{2024}^5 .	1,0
Vậy số các xâu thỏa mãn bài toán là $C_{2024}^4 + C_{2024}^5 = C_{2025}^5$ (xâu).	0,5

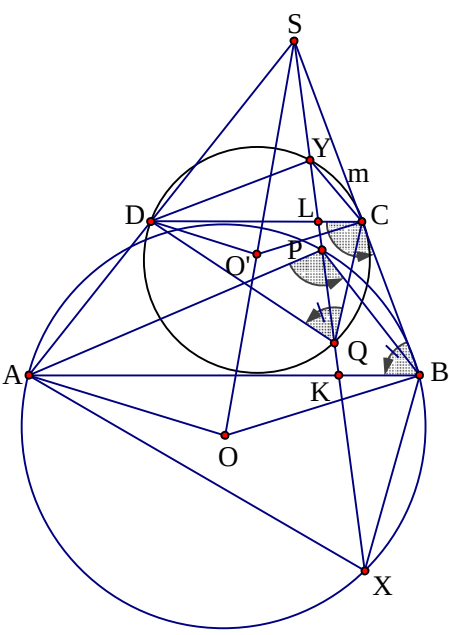
Câu 6 (7,0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^4 - x^3 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$. Biết rằng $P(x)$ có 4 nghiệm thực x_1, x_2, x_3, x_4 ; chứng minh rằng $-\frac{1}{2} \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$ và $a \geq 2b$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
Theo Định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0 \\ x_1x_2x_3x_4 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \right) = -a \\ x_1x_2x_3x_4 = b \end{cases} \quad (*)$	1,0
Suy ra $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$.	0,5
Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, ta có $1 = x_1^2 + (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \geq x_1^2 + \frac{1}{3}(x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + \frac{1}{3}(1 - x_1)^2 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1.$	1,0
Tương tự cho $-\frac{1}{2} \leq x_2, x_3, x_4 \leq 1$. Vậy $-\frac{1}{2} \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$.	0,5
Theo trên thì $-\frac{1}{2} \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$. Vì hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của $P(x)$ dương nên $P(1) \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$ (1).	1,0
Nếu $b \leq 0$ thì từ (1) suy ra $a \geq 0 \Rightarrow a \geq 2b$.	0,5
Nếu $b > 0$ thì (*) suy ra $x_1x_2x_3x_4 > 0$. Khi đó, trong 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 phải có hai nghiệm dương, hai nghiệm âm. Không mất tổng quát, giả sử $x_1, x_2 > 0$; $x_3, x_4 < 0$.	1,0
Từ $-\frac{1}{2} \leq x_4 \leq 1$ suy ra $1 + 2x_4 \geq 0$ và $1 - x_4 \geq 0$. Do đó $\begin{aligned} x_4^2(1 - x_4) \geq 0 &\geq x_1x_2x_3(1 + 2x_4) \Rightarrow x_4^2(x_1 + x_2 + x_3) - x_1x_2x_3 \geq 2x_1x_2x_3x_4 \\ \Rightarrow \frac{x_4(x_1 + x_2 + x_3)}{x_1x_2x_3} - \frac{1}{x_4} &\geq 2 \Rightarrow -\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} - \frac{1}{x_4} \geq 2 \\ \Rightarrow -\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4} &\geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} \leq -2 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} a \geq 2b. \end{aligned}$ Vậy trong mọi trường hợp thì $a \geq 2b$.	1,5

Câu 7 (7,0 điểm). Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy là AB và CD ($AB > CD$). Trên đoạn CD lấy điểm L khác C và D . Gọi S là giao điểm của AD và BC ; đường thẳng SL cắt AB tại K . Trên tia KS lấy điểm P sao cho $\widehat{APB} = \widehat{BCD}$, trên tia LK lấy điểm Q sao cho $\widehat{CQD} = \widehat{ABC}$. Gọi Y là giao điểm thứ hai của KL với đường tròn ngoại tiếp các tam giác CDQ ($Y \neq Q$). Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác SCQ và SYC đồng dạng;

b) Bốn điểm P, Q, B, C cùng thuộc một đường tròn.

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Xét hai tam giác $\triangle SCQ, \triangle SYC$ có góc $\widehat{CSY}$ chung (1). 	0,5
Ta có $\widehat{SCD} = 180^\circ - \widehat{BCD} = \widehat{ABC} = \widehat{CQD} \Rightarrow CS$ là tiếp tuyến của (CDQ) .	1,5
Do đó $\widehat{SCY} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{YmC} = \widehat{SQC}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác $\triangle SCQ$ và $\triangle SYC$ đồng dạng.	1,0
b) Gọi $(O) = (ABP), (O') = (CDQ)$. Từ $\begin{cases} AB \parallel CD \\ OB \parallel O'C \end{cases}$ suy ra $\widehat{O'CD} = \widehat{OBA}$. Do đó $\triangle O'CD \sim \triangle OBA \Rightarrow \frac{OB}{O'C} = \frac{AB}{CD} = \frac{SB}{SC} \Rightarrow \overline{O, O', S}.$	1,5
Gọi X là giao điểm thứ hai của KL với đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABP ($X \neq P$). Đặt $k = \frac{SB}{SC}$. Vì SC là tiếp tuyến của đường tròn (CQD), SB là tiếp tuyến của đường tròn (ABP) và $\overline{S, O, O'}$ nên phép vị tự $V_S^k : (CQD) \mapsto (BXA)$. Suy ra $V_S^k : Q \mapsto X$. Do đó $\frac{SB}{SC} = k = \frac{SX}{SQ}$ (3).	1,5
Vì SB là tiếp tuyến của đường tròn (ABP) nên $SP.SX = SB^2$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $SP.SQ = SP \cdot \frac{SC.SX}{SB} = SC.SB \Rightarrow P, Q, B, C$ cùng thuộc một đường tròn.	1,0

Ghi chú: Nếu thí sinh làm bài theo cách khác (với kiến thức trong chương trình THPT chuyên) thì vẫn cho điểm theo các phần đúng tương ứng.

-----Hết-----