

Bài	Nội dung	Điểm
1 (5 điểm)	Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. a) Chứng minh dãy số (x_n) bị chặn. b) Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.	
	a) Rõ ràng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $x_n > 0$, vậy dãy đã cho bị chặn dưới. Áp dụng BDT Cauchy, ta có: $x_n = \frac{1}{4} \left(x_{n-1} + \frac{3}{x_{n-1}} \right) \geq \frac{1}{4} \cdot 2 \sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{3}{x_{n-1}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $x_n < \sqrt{3}$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, với $n=1$, khẳng định đúng. Với $n=2$, $x_2 = \frac{13}{8} < \sqrt{3}$. Giả sử bài toán đúng đến $n=k$ với $k \in \mathbb{N}$ và $k \geq 2$. Lúc này $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x_k < \sqrt{3}$. Do đó: $x_{k+1} = \frac{1}{4} \left(x_k + \frac{3}{x_k} \right) < \frac{1}{4} \left(\sqrt{3} + \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} < \sqrt{3}$. Vậy $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x_n < \sqrt{3}$ với $\forall 2 \leq n \in \mathbb{N}^*$, tức là dãy đã cho bị chặn.	1,5
	b) Với $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $x_{n+2} = \frac{1}{4} \left(x_{n+1} + \frac{3}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)}$ $= \frac{1}{16} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right) + \frac{3}{\left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)} = \frac{x_n^2 + 3}{16x_n} + \frac{3x_n}{x_n^2 + 3}.$ Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{16x} + \frac{3x}{x^2 + 3}$ với $\forall x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3} \right]$. Ta có: $f'(x) = \frac{x^2 - 3}{16x^2} + \frac{3(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^2} = (x^2 - 3) \left(\frac{1}{16x^2} - \frac{3}{(x^2 + 3)^2} \right)$ $= (x^2 - 3) \left(\frac{x^4 - 42x^2 + 9}{16x^2 \cdot (x^2 + 3)^2} \right).$	2,0

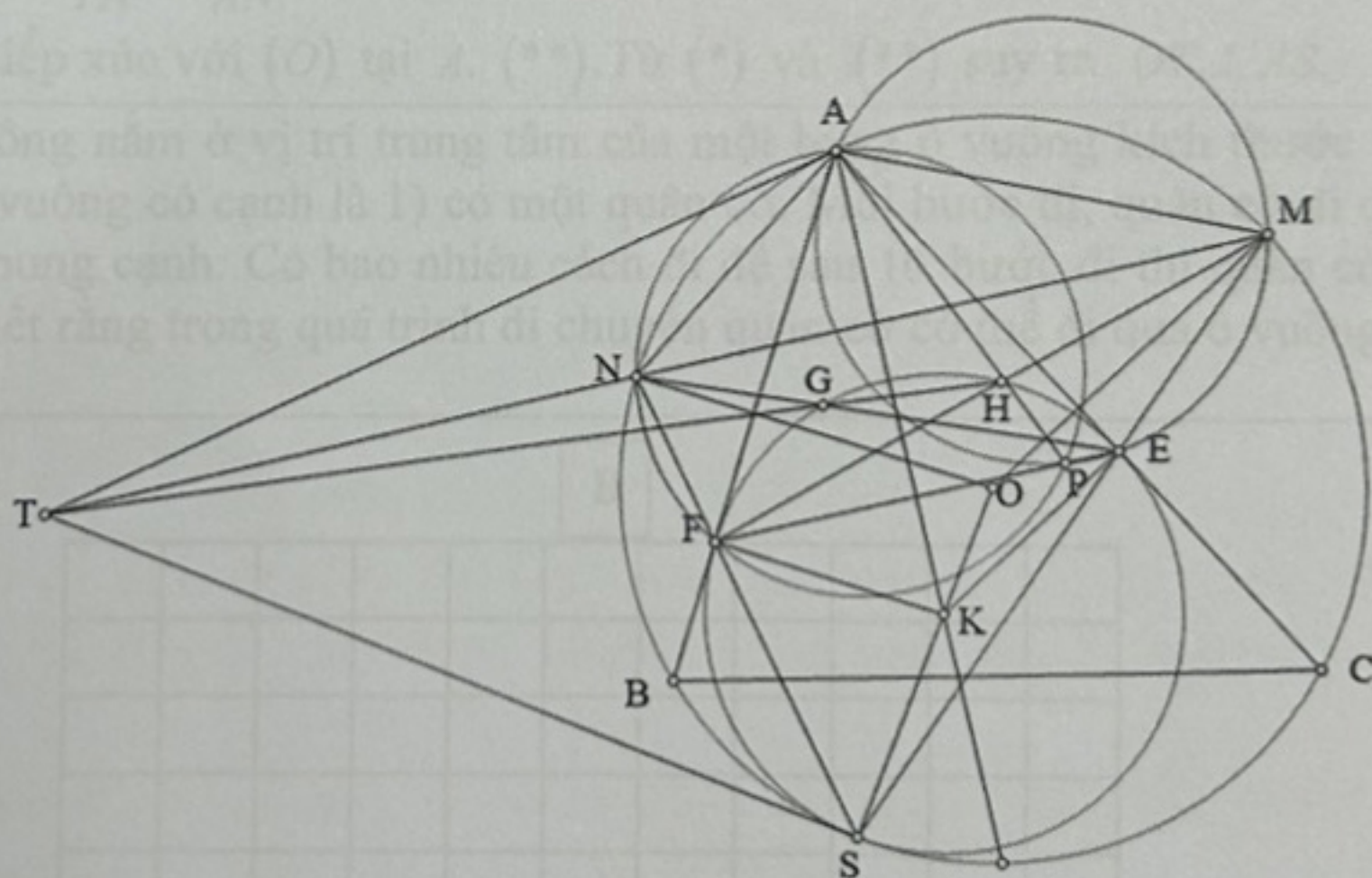
	Do $x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$ nên $x^2 - 3 < 0$ và $x^4 - 42x^2 + 9 = x^2(x^2 - 3) + (9 - 12x^2) - 27x^2 < 0.$ Suy ra $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{3}\right)$. Tính trực tiếp ta được $x_2 > x_4$ và $x_3 > x_5$ nên dãy con $(x_{2k})_{k=1;+\infty}$ đơn điệu giảm và dãy con $(x_{2k+1})_{k=1;+\infty}$ đơn điệu tăng. Mà dãy đã cho bị chặn nên tồn tại $A = \lim x_{2n}; B = \lim x_{2n+1} \text{ với } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq A, B < \sqrt{3}$ Và $A = \frac{1}{4}\left(B + \frac{3}{B}\right); B = \frac{1}{4}\left(A + \frac{3}{A}\right) \Rightarrow (A - B)\left(5 - \frac{3}{AB}\right) = 0.$ Mặt khác $AB \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{3}{AB} \leq 4.$ Do đó $A = B$ và thỏa mãn $A = \frac{1}{4}\left(A + \frac{3}{A}\right); A \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = B = 1.$ Vậy dãy đã cho có giới hạn và $\lim x_n = 1.$	1,5
2 (5 điểm)	Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + (f(x+1))^2 \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$ Ta có $f(f(y) + x^2 + 1) + 2x = y + f^2(x+1)$ (1) Thay $x = 0$ vào (1) ta được $f(f(y) + 1) = y + f^2(1)$ (2) Từ (2) dễ dàng suy ra f là song ánh. Do đó tồn tại duy nhất a sao cho $f(a) = 0.$ Thay $y = a$ vào (2) $f(1) = a + f^2(1) \Leftrightarrow a = f(1) - f^2(1)$ Thay $x = -1$ vào (1) $f(f(y) + 2) = y + 2 + f^2(0)$ kết hợp với (2) ta được $f(f(y) + 2) - f(f(y) + 1) = 2 + f^2(0) - f^2(1) \text{ và do } f \text{ là song ánh nên}$ $f(x+1) - f(x) = 2 + f^2(0) - f^2(1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$ Thay $x = 0$ vào (3) $f(1) - f(0) = 2 + f^2(0) - f^2(1)$ (4) và $f(2) - f(1) = f(1) - f(0) \Leftrightarrow f(2) = 2f(1) - f(0).$ Thay x bởi $-x$ vào (1) ta có $f(f(y) + x^2 + 1) - 2x = y + f^2(1-x)$ kết hợp với (1) ta có $f^2(1-x) + 2x = f^2(x+1) - 2x \Leftrightarrow f^2(0) + 2 = f^2(2) - 2$ $\Leftrightarrow f^2(0) + 4 = [2f(1) - f(0)]^2 \quad (5)$ Kết hợp (4) và (5) ta tìm được $f(1) = 1$, vì vậy $a = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow f(x+1) = f(x) + 1 \Leftrightarrow f(f(x) + 1) = f(f(x)) + 1$ Mà $f(f(x) + 1) = x + f^2(1) = x + 1$ suy ra $f(f(x)) = x.$ Thay $y = 0$ vào (1) ta có $f(x^2 + 1) + 2x = (f(x+1))^2 \Leftrightarrow f(x^2) + 2x = (f(x))^2 + 2f(x), \quad (6) \forall x \in \mathbb{R}.$	1,5 1,0 1,0

Do f toàn ánh nên tồn tại y sao cho $f(y) = 2x$. Thay vào (1) ta được $f((x+1)^2) + 2x = y + f^2(x+1) \Rightarrow f((x+1)^2) + 2x = y + (f(x)+1)^2$.
 Trong (6) thay x bởi $x+1$ ta được $f((x+1)^2) + 2(x+1) = (f(x)+1)^2 + 2(f(x)+1)$.
 Từ đó $y = 2f(x)$. Khi đó $f(f(y)) = f(2x) = y = 2f(x)$.
 Tức là $f(2x) = 2f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 Bằng cách làm tương tự với $f(y) = -2x$ và thay x bởi $x-1$ ta suy ra $f(-2x) = -2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
 Kết hợp lại ta được $f(2x) = -f(-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, hay f là hàm lẻ.
 Sử dụng đẳng thức $f^2(1-x) + 2x = f^2(x+1) - 2x$ ta có $(1-f(x))^2 + 2x = (1+f(x))^2 - 2x$, kéo theo $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
 Thử lại thấy hàm số này thoả mãn.
 Vậy $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

1,5

3
(5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (K) tiếp xúc với các cạnh CA, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại S . Các đường thẳng SE, SF lần lượt cắt đường tròn (O) tại các điểm M, N khác S . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và đường tròn ngoại tiếp AFN cắt nhau tại P khác A .



a) Chứng minh đường thẳng AN song song với đường thẳng PM .

Ta có $\widehat{APF} = 180 - \widehat{ANS} = \widehat{AMS} = 180 - \widehat{APE}$ suy ra F, P, E thẳng hàng.

Vì AC là tiếp tuyến của đường tròn (K) nên $\widehat{SEC} = \widehat{EFS}$.

Tứ giác $ANFP$ nội tiếp nên $\widehat{EFS} = \widehat{PAN}$ và tứ giác $AMEP$ nội tiếp nên

$\widehat{APM} = \widehat{AEM}$. Mà $\widehat{AEM} = \widehat{SEC}$ (đối đỉnh).

Vậy $\widehat{APM} = \widehat{PAN} \Rightarrow AN \parallel PM$.

1,0

1,0

b) Các đường thẳng EN, FM lần lượt cắt (K) tại G, H khác E, F . Đường thẳng GH cắt MN tại T . Chứng minh đường thẳng AS vuông góc với đường thẳng OT .

Chứng minh tương tự câu a) ta có A, H, P thẳng hàng và $AM \parallel PN$.

Các tam giác SKF, SON cân có chung đỉnh S nên đồng dạng, suy ra

$$\frac{SF}{SN} = \frac{SK}{SO}.$$

Tương tự $\frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SM}$, do đó $\frac{SF}{SN} = \frac{SK}{SO} = \frac{SE}{SM}$ nên $MN \parallel EF$.

Vậy $\widehat{HGE} = \widehat{HFE} = \widehat{HMN}$ suy ra tứ giác $MNGH$ nội tiếp. Giả sử TS cắt (O) và (K) lần lượt tại S_1, S_2 thì $TS.TS_1 = TM.TN = TH.TG = TS.TS_2$ suy ra $TS_1 = TS_2$ suy ra $S_1 \equiv S_2 \equiv S$. Vậy TS là tiếp tuyến của (O) . (*)

1,5

Ta có tứ giác $AMEN$ là hình bình hành nên AP và MN cắt nhau tại trung điểm I mỗi đường.

Mà $\widehat{IAM} = \widehat{PES} = \widehat{FST} = \widehat{NAS}$ và $\widehat{AMI} = \widehat{AMN} = \widehat{ASN}$.

Vậy $\triangle AIM \sim \triangle ANS$ suy ra $AI.SN = AN.IM$.

Tương tự $\triangle AIN \sim \triangle AMS$ suy ra $AI.SM = AM.IN$.

Khi đó $\frac{SM}{SN} = \frac{AM}{AN}$. Do TS tiếp xúc với (O) tại S nên

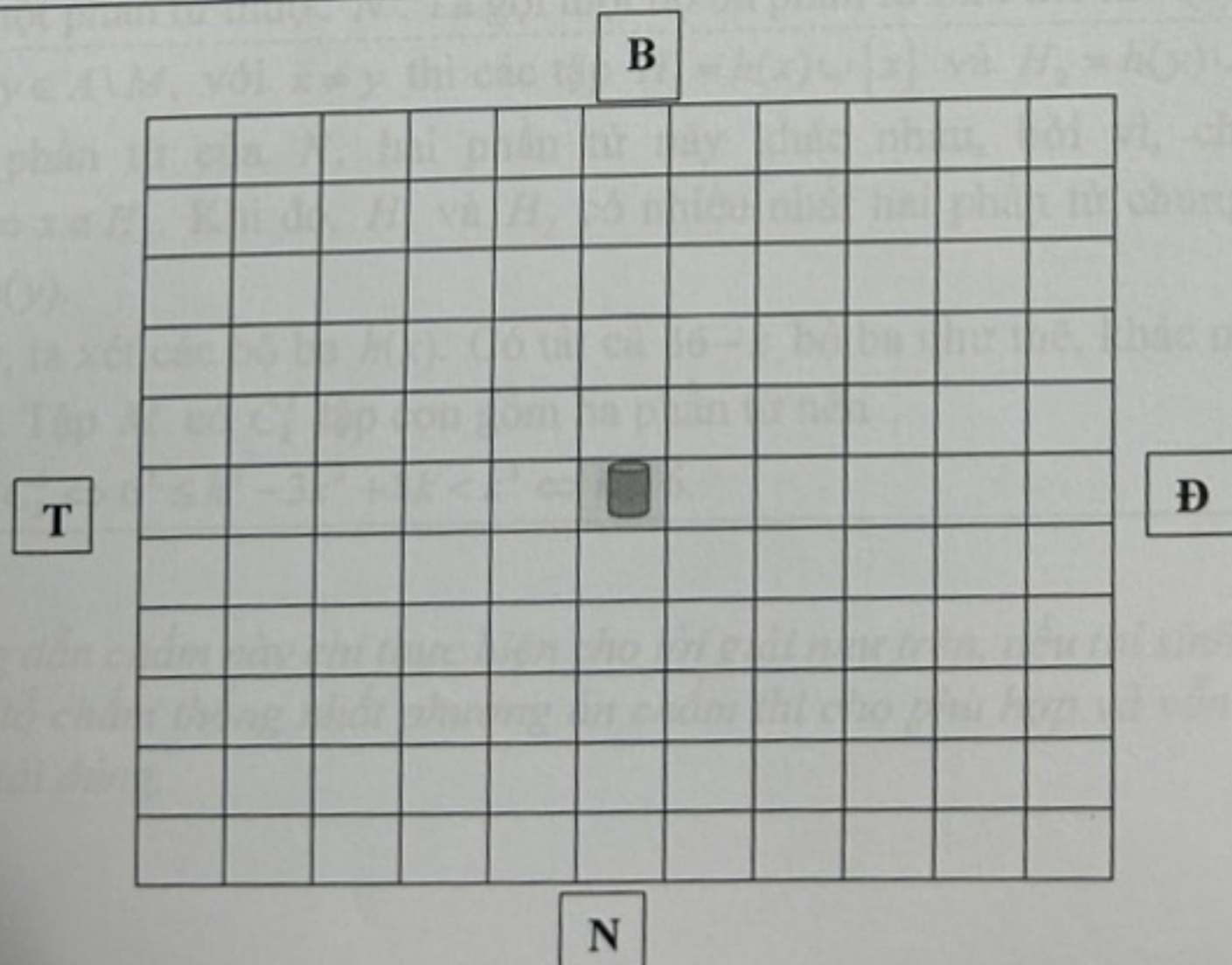
$$\frac{TM}{TN} = \frac{SM^2}{SN^2} \Rightarrow \frac{TM}{TN} = \frac{AM^2}{AN^2}.$$

Suy ra TA tiếp xúc với (O) tại A . (**). Từ (*) và (**) suy ra $OT \perp AS$.

1,5

4
(5 điểm)

a) Tại ô vuông nằm ở vị trí trung tâm của một bảng ô vuông kích thước 11×11 (bảng gồm 121 ô vuông có cạnh là 1) có một quân cờ. Mỗi bước đi, quân cờ di chuyển đến ô vuông có chung cạnh. Có bao nhiêu cách đi để sau 10 bước đi thì quân cờ trở về vị trí ban đầu? Biết rằng trong quá trình di chuyển quân cờ có thể đi qua ô vuông nằm ở vị trí trung tâm.



1,0

Ta kí hiệu các hướng di chuyển Đ, T, N, B của quân cờ như hình vẽ.

Mỗi cách di chuyển của quân cờ ứng với một bộ 10 chữ lấy từ 4 chữ đó.

Ta thấy rằng để quân cờ trở về vị trí ban đầu thì số chữ Đ và số chữ T phải bằng nhau, số chữ B và số chữ N phải bằng nhau.

Gọi số chữ số Đ và số chữ số T là m thì số chữ số B và số chữ số N là $5-m$ ($0 \leq m \leq 5, m \in N$)

$$\text{Số các bộ thỏa mãn là } \sum_{m=0}^5 \frac{10!}{(m!)^2[(5-m)!]^2} = \sum_{m=0}^5 \frac{10!(C_5^m)^2}{(5!)^2} = C_{10}^5 \sum_{m=0}^5 (C_5^m)^2.$$

Từ đồng nhất thức $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ và đẳng thức $C_n^m = C_n^{n-m}$

$$\text{Suy ra : } \sum_{m=0}^n (C_n^m)^2 = C_{2n}^n. \text{ Do đó : } \sum_{m=0}^5 (C_5^m)^2 = C_{10}^5$$

Vậy số cách di chuyển của quân cờ thỏa mãn yêu cầu là $(C_{10}^5)^2 = 63504$

b) Chọn ra một số tập con gồm 4 phần tử từ một tập hợp A có 36 phần tử sao bất cứ hai tập 4 phần tử nào trong các tập con đã chọn cũng có nhiều nhất là hai phần tử chung. Chứng minh rằng tồn tại một tập con của A gồm ít nhất 6 phần tử của A cho tập này không chứa bất cứ tập con 4 phần tử nào đã chọn.

Gọi N là tập tất cả các tập con có 4 phần tử đã chọn thỏa mãn điều kiện đề bài. Ta gọi một tập con của A là tập tốt nếu không có phần tử nào của N là tập con của nó. Như vậy, một tập con của A mà có số phần tử không lớn hơn 3 là tập tốt. Một tập con tốt của A được gọi là lớn nhất nếu nó không chứa (thực sự) trong một tập con tốt nào cả. Rõ ràng phải tồn tại ít nhất một tập con tốt lớn nhất, bởi vì từ một tập con tốt, ta có thể thêm vào các phần tử nữa đến mức có thể được.

Ta chứng minh mọi tập con tốt lớn nhất đều có nhiều hơn 6 phần tử. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Gọi M là tập con tốt lớn nhất của A và $|M| = k$. Rõ ràng $k \geq 3$, do tính lớn nhất của M và do mọi tập con ba phần tử đều là tập tốt. Khi đó $M \cup \{x\}$ không phải là tập tốt. Điều này có nghĩa rằng x cùng với ba phần tử nào đó của M sẽ tạo thành một phần tử thuộc N . Ta gọi một bộ ba phần tử như thế là $h(x)$.

Nếu $x, y \in A \setminus M$, với $x \neq y$ thì các tập $H_1 = h(x) \cup \{x\}$ và $H_2 = h(y) \cup \{y\}$ đều là các phần tử của N , hai phần tử này khác nhau, bởi vì, chẳng hạn $x \in H_1 \Rightarrow x \notin H_2$. Khi đó, H_1 và H_2 có nhiều nhất hai phần tử chung. Suy ra $h(x) \neq h(y)$.

Bây giờ, ta xét các bộ ba $h(x)$. Có tất cả $36-k$ bộ ba như thế, khác nhau từng đôi một. Tập M có C_k^3 tập con gồm ba phần tử nên

$$36-k \leq C_k^3 \Leftrightarrow 6^3 \leq k^3 - 3k^2 + 8k < k^3 \Leftrightarrow k > 6.$$