

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức: $P = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2023^2} + \frac{1}{2024^2}}$.

b) Cho $0 < x < 2$ thỏa mãn: $\frac{3(x^2 + 5x - 1)}{x^2 + x - 1} + 23 = \frac{24(x^2 + 3x - 1)}{x^2 + 2x - 1}$.

Tính giá trị của biểu thức: $T = (x^2 - x - 2)^{2024} + \frac{1}{(x^2 - x)^{2023}}$.

Câu 2 (4,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy . Cho điểm $A(1;3)$, parabol (P) và đường thẳng (d) có phương trình lần lượt là: $y = x^2$ và $y = ax + 3 - a$.

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của a đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt. Giả sử B và C là hai giao điểm của (d) và (P) . Tìm a để $AB = 2AC$.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của B, C . Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1)}{x_1^2 + x_2^2 + 6(x_1 + x_2)}.$$

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \end{cases}$$

b) Tìm tất cả các số nguyên tố x và y thỏa mãn $x^4 + 11 = y^3$.

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn $\widehat{BC}$ sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F là điểm đối xứng với C qua AB . Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng với A). Gọi H là giao điểm của BE và CF .

a) Chứng minh KA là đường phân giác trong của góc $\widehat{BKC}$.

b) Chứng minh tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

c) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác $BHCK$ lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R .

d) Chứng minh đường thẳng AK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (2,0 điểm).

a) Cho các số dương a, b . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{\sqrt{a^3 + 1} - 1} + \frac{2}{\sqrt{b^3 + 1} - 1} + \frac{ab}{4} - \frac{8}{a + b}.$$

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $\frac{a^2 + p}{ap^2 - 2}$ là số nguyên trong đó a là số nguyên dương.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: