

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{x-4} + 1)\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 5$

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{3a+bc} + \sqrt{3b+ca} + \sqrt{3c+ab}$

Câu 2 (3,0 điểm)

1. Cho phương trình $\sqrt{3x^2 - 2x + m - 4} = \sqrt{6x}$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -7$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x(2y+1) - y \\ \sqrt{2x+y} = x+2y \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AO cắt BC tại E . Trên đoạn AO lấy điểm D sao cho $OD = OE$. Đường đi thẳng qua D , vuông góc với BC cắt BC, AC, AB lần lượt tại X, Y, Z . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt lại (O) tại điểm T khác A . Chứng minh rằng:

a) Tam giác OXE là tam giác cân.

b) Bốn điểm C, X, Y, T cùng thuộc một đường tròn.

c) $BX = CE$

d) $AT \parallel BC$.

Câu 4 (1,0 điểm)

Trong hình chữ nhật (H) kích thước $6\text{cm} \times 4\text{cm}$, cho 5 điểm phân biệt $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$. Chứng minh rằng

a) Trong 5 điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ luôn tồn tại 3 điểm cùng thuộc một đường tròn bán kính $2,5\text{ cm}$

b) Tồn tại một đường tròn đường kính $0,99\text{ cm}$ nằm trong (H) và không có điểm chung với bất kì hình tròn nào trong năm hình tròn tâm A_i đường kính 1 cm (Với $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho 10 số nguyên dương phân biệt $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{10}$ và p là một ước nguyên tố bất kì của $A = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10}$. Chứng minh rằng

a) $B = 10p^2 - 10$ chia hết cho p

b) $C = a_1 \cdot 1^{p^{2024}} + a_2 \cdot 2^{p^{2024}} + a_3 \cdot 3^{p^{2024}} + \dots + a_{10} \cdot 10^{p^{2024}}$ là hợp số

Hướng dẫn

Câu 1 (2,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{x-4} + 1)\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}$ với $x \geq 5$

b) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{3a+bc} + \sqrt{3b+ca} + \sqrt{3c+ab}$

Giải.

a) Với $x \geq 5$

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{x-4} + 1)\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} = (\sqrt{x-4} + 1)\sqrt{x-4-2\sqrt{x-4}+1} \\ &= (\sqrt{x-4} + 1)\sqrt{(\sqrt{x-4}-1)^2} = (\sqrt{x-4} + 1)(\sqrt{x-4}-1) = x-4-1 = x-5 \end{aligned}$$

b) Vì $a + b + c = 3$ nên

$$\sqrt{3a+bc} = \sqrt{(a+b+c)a+bc} = \sqrt{(a+b)(a+c)}$$

$$\text{Áp dụng BĐT AM-GM ta có } \sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{a+b+a+c}{2} = \frac{2a+b+c}{2}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{3a+bc} \leq \frac{2a+b+c}{2} \quad (1). \text{ Tương tự ta có}$$

$$\sqrt{3b+ac} \leq \frac{a+2b+c}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{3c+ab} \leq \frac{a+b+2c}{2} \quad (3)$$

$$\text{Cộng vế với vế các BĐT (1); (2); (3) ta có } P \leq \frac{4(a+b+c)}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Vậy GTLN của $P = 6$ khi $a = b = c = 1$

Câu 2 (3,0 điểm)

1. Cho phương trình $\sqrt{3x^2 - 2x + m - 4} = \sqrt{6x}$ (1) với m là tham số.

a) Giải phương trình (1) khi $m = -7$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + y^2 = x(2y+1) - y \\ \sqrt{2x+y} = x+2y \end{cases}$$

Giải.

$$1a) \text{ ĐKXD } \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 - 2x + m - 4 \geq 0 \end{cases}$$

Thay $m = -7$ vào phương trình ta được $\sqrt{3x^2 - 2x - 7 - 4} = \sqrt{6x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 2x - 11} = \sqrt{6x}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2x - 11 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 - 8x - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (Loại)} \\ x = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Vậy khi $m = -7$ thì phương trình có nghiệm $x = \frac{11}{3}$

1b) Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 2x + m - 4 = 6x \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + m - 4 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm không âm phân biệt; điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S = x_1 + x_2 \geq 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-4)^2 - 3(m-4) \geq 0 \\ \frac{8}{3} > 0 \\ \frac{m-4}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m \leq \frac{28}{3}$$

$$2. \text{ ĐKXD } \begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x(2y+1) - y & (1) \\ \sqrt{2x+y} = x+2y & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1) $x^2 + y^2 = x(2y+1) - y \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - x + y = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 - (x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-y-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y+1 \end{cases}$$

$$\text{*TH1: } x = y, \text{ thay vào phương trình (2) ta được } \sqrt{3y} = 3y \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \sqrt{3y}(\sqrt{3y}-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y = 0 \text{ (TM)} \\ y = \frac{1}{3} \text{ (TM)} \end{cases}$$

***TH2:** $x = y+1$, thay vào phương trình (2) ta được.

$$\sqrt{2(y+1)+y} = 1+3y \Leftrightarrow \sqrt{3y+2} = 1+3y \quad (3)$$

$$\text{ĐK: } 3y+1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \frac{-1}{3}$$

Bình phương 2 vế phương trình (3) được $3y+2 = (1+3y)^2 \Leftrightarrow 3y+2 = 1+6y+9y^2 \Leftrightarrow 9y^2+3y-1=0$

Có $\Delta = 9+36 = 45 > 0$, suy ra (3) có 2 nghiệm phân biệt

$$y_1 = \frac{-3 + \sqrt{45}}{18} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{6} \text{ (Thỏa mãn) và } y_2 = \frac{-3 - \sqrt{45}}{18} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{6} < \frac{-1}{3} \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$\text{Với } y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{6} \text{ ta có } x = 1 + \frac{-1 + \sqrt{5}}{6} = \frac{5 + \sqrt{5}}{6}$$

Tóm lại, hệ đã cho có 3 nghiệm $(x; y)$ là $(0; 0); \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{6}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{6}\right)$

Câu 3 (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AO cắt BC tại E . Trên đoạn AO lấy điểm D sao cho $OD = OE$. Đường đi thẳng qua D , vuông góc với BC cắt BC, AC, AB lần lượt tại X, Y, Z . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt lại (O) tại điểm T khác A .

Chứng minh rằng:

- Tam giác OXE là tam giác cân.
- Bốn điểm C, X, Y, T cùng thuộc một đường tròn.
- $BX = CE$
- $AT \parallel BC$.

Giải.

a) Trong tam giác vuông XDE vuông tại X có $OD = OE$ nên XO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền, do đó $XO = OD = OE$, suy ra tam giác OXE là tam giác cân tại O

b) Ta có $YTC = ATC - ATY = ATC - AZX = 180^\circ - ABC - AZX$
 $= 180^\circ - (ABC + AZX) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Tứ giác $CXYT$ có $CXY + YTC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra đpcm

c) Hai tam giác OBC và XOE là hai tam giác cân tại O ; kẻ

$OG \perp BC$ ($G \in BC$) thì OG là đường trung trực chung của BC và XE ; do đó $GB = GC$; $GX = GE$ suy ra $GB - GX = GC - GE \Rightarrow BX = CE$

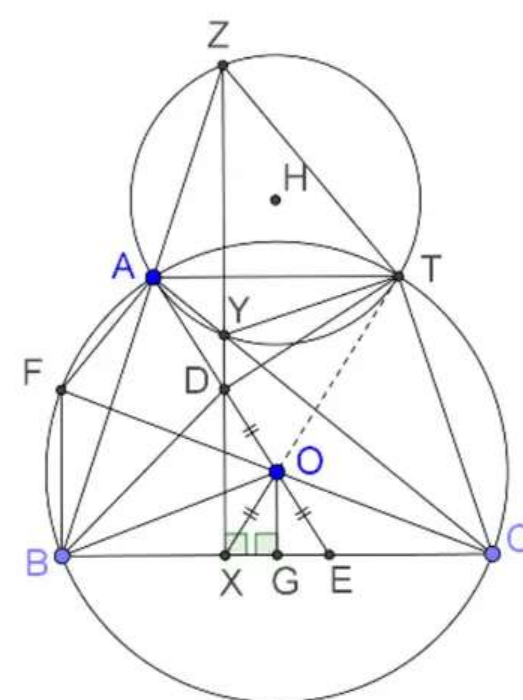
d) Kẻ đường kính CF của đường tròn (O)

+ $OAC = OCA = 90^\circ - AFC = 90^\circ - ABC = AZY$ suy ra AO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AZTY$

+ Có $TXC = TYC$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung TC của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CXYT$)

+ $TYC = 180^\circ - TYA = BZT$

Suy ra $TXC = BZT \Rightarrow$ tứ giác $BXTZ$ là tứ giác nội tiếp, khi đó $TAE = AZT = TXE = AEX$, mà TAE và AEX là hai góc ở vị trí so le trong nên $AT \parallel BC$



Câu 4 (1,0 điểm)

Trong hình chữ nhật (H) kích thước $6\text{cm} \times 4\text{cm}$, cho 5 điểm phân biệt $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$. Chứng minh rằng

- Trong 5 điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ luôn tồn tại 3 điểm cùng thuộc một đường tròn bán kính $2,5\text{ cm}$
- Tồn tại một đường tròn đường kính $0,99\text{ cm}$ nằm trong (H) và không có điểm chung với bất kì hình tròn nào trong năm hình tròn tâm A_i đường kính 1 cm (Với $i = 1, 2, 3, 4, 5$)

Giải

a) Chia hình chữ nhật (H) thành hai hình chữ nhật con kích thước $3cm \times 4cm$ khi đó mỗi hình chữ nhật con sẽ nội tiếp đường tròn bán kính $2,5\text{ cm}$

Theo nguyên lý Dirichle, có $5 > 2.2$ nên tồn tại một hình chữ nhật con chứa 3 trong 5 điểm

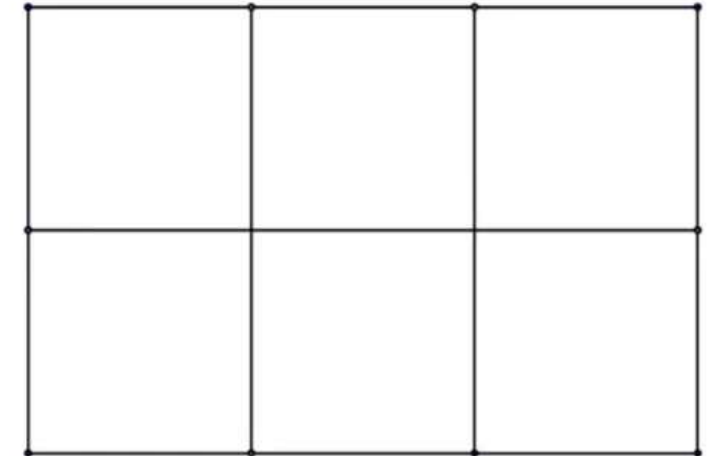
$A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$

Từ đó suy ra trong 5 điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ luôn tồn tại 3 điểm cùng thuộc một đường tròn bán kính $2,5\text{ cm}$

b) Chia hình chữ nhật (H) thành 6 hình vuông con kích thước

$2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$ như hình vẽ

Vì có 6 hình vuông con và 5 điểm nên tồn tại một hình vuông không chứa điểm A_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) nào nằm trong hình vuông đó, giả sử là hình vuông ABCD



Trong hình vuông, ta gọi đường tròn (O) là đường tròn có tâm là tâm hình vuông, bán kính $0,495\text{ cm}$, ta sẽ chứng minh (O) là đường tròn cần tìm.

Gọi E là trung điểm BC , đường tròn (E) có bán kính $0,5\text{ cm}$

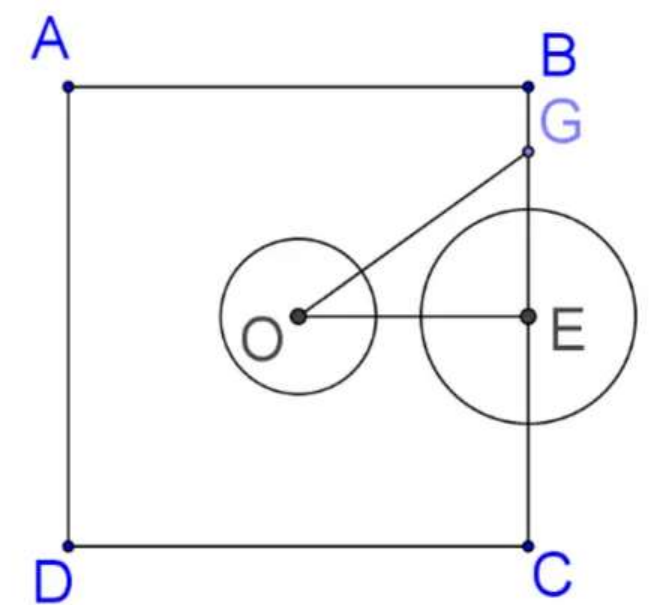
Xét G là điểm bất kì không nằm trong hình vuông ABCD

Gọi đường tròn (G) là đường tròn tâm G , bán kính $0,5\text{ cm}$

Khi đó $OG > OE = 1\text{ cm}$

$$R_O + R_G = R_O + R_E = 0,495 + 0,5 = 0,995\text{ cm}$$

Suy ra (O) và (G) không giao nhau, vậy (O) chính là đường tròn cần tìm



Câu 5 (1,0 điểm)

Cho 10 số nguyên dương phân biệt $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{10}$ và p là một ước nguyên tố bất kì của

$$A = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10}. \text{ Chứng minh rằng}$$

a) $B = 10p^2 - 10$ chia hết cho p

b) $C = a_1 \cdot 1^{p^{2024}} + a_2 \cdot 2^{p^{2024}} + a_3 \cdot 3^{p^{2024}} + \dots + a_{10} \cdot 10^{p^{2024}}$ là hợp số

Giải

a) Ta có $B = 10p^2 - 10 = 10 \cdot (10^{p^2-1} - 1) = 10 \cdot (10^{(p-1)(p+1)} - 1)$

+) Nếu $p \mid 10$ ($p \in \mathbb{P}$) $\Rightarrow p \in 2, 5 \Rightarrow p \mid 10p^2 - 10$ hay $B = 10p^2 - 10$ chia hết cho p .

+) Nếu $(p, 10) = 1$ theo định lý nhỏ Fermat:

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (10^{p-1})^{p+1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 10^{p^2-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

Vậy $B = 10p^2 - 10$ chia hết cho $p \forall p \in \mathbb{P}$.

b) Xét $D = C - A = (a_1 \cdot 1^{p^{2024}} + a_2 \cdot 2^{p^{2024}} + a_3 \cdot 3^{p^{2024}} + \dots + a_{10} \cdot 10^{p^{2024}}) - (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10})$

$$= (a_1 \cdot 1^{p^{2024}} - a_1) + (a_2 \cdot 2^{p^{2024}} - 2a_2) + \dots + (a_{10} \cdot 10^{p^{2024}} - 10a_{10})$$

Xét k với $k = \overline{1, 10}$. Ta có $k^{p^{2024}} - k = k(k^{p^{2024}-1} - 1)$.

+) Trường hợp 1: $(p, k) = 1$ ($p \in \mathbb{P}$).

Theo định lý nhỏ Fermat:

$$k^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow k^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p \mid k^{p-1} - 1 \text{ mà } k^{p-1} - 1 \mid k^{p^{2024}-1} - 1 \text{ nên } p \mid k^{p^{2024}-1} - 1$$

+) Trường hợp 2: $p \mid k$. Ta cũng suy ra được: $p \mid k(k^{p^{2024}-1} - 1)$

Vậy $p \mid k(k^{p^{2024}-1} - 1)$ trong mọi trường hợp.

Thay k vào D ta được $D = C - A$ chia hết cho p . Mà từ giả thiết ta có A chia hết cho p suy ra C cũng chia hết cho p . (1)

Mặt khác ta cũng có: $p \leq A = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10} < a_1 \cdot 1^{p^{2024}} + a_2 \cdot 2^{p^{2024}} + a_3 \cdot 3^{p^{2024}} + \dots + a_{10} \cdot 10^{p^{2024}} = C$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $C = a_1 \cdot 1^{p^{2024}} + a_2 \cdot 2^{p^{2024}} + a_3 \cdot 3^{p^{2024}} + \dots + a_{10} \cdot 10^{p^{2024}}$ là hợp số.