

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$, với $x \geq 0; x \neq 9$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca}=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 2023 \frac{a^{2023}}{c^{2023}} + 2024 \frac{b^{2024}}{c^{2024}} + 2025 \frac{c^{2025}}{a^{2025}}.$$

Câu 2. (0,5 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp S . Tính xác suất để lấy được một số chia hết cho 7.

Câu 3. (1,0 điểm)

Một cửa hàng bán gạo trong 4 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày đầu tiên) lượng gạo bán ra bằng $r\%$ lượng gạo còn lại của ngày hôm trước. Tính r biết rằng lượng gạo còn lại sau ngày thứ tư bằng $\frac{1}{16}$ lượng gạo ban đầu.

Câu 4. (1,0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ac} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{xy+1}.$$

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Cho x, y là các số nguyên dương sao cho $x^2 + 2y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x^2 + y$ là tổng của hai số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$.

Câu 6. (1,0 điểm). Cho 2 phương trình: $2x^2 + x - m^2 + 2m - 15 = 0$ (1) và $2x^2 + 3x - m^2 + 2m - 14 = 0$ (2). Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3x_2x_3$.

Câu 7. (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho (M khác A và B), H là hình chiếu của M trên AB . Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K .

a) Chứng minh tứ giác $OBKM$ nội tiếp.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA và MB . Gọi I là giao điểm của AK và MH . Chứng minh I là trung điểm CD .

c) Gọi E , F lần lượt là trung điểm của AH và BH . Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$, với $x \geq 0; x \neq 9$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca}=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 2023 \frac{a^{2023}}{c^{2023}} + 2024 \frac{b^{2024}}{c^{2024}} + 2025 \frac{c^{2025}}{a^{2025}}.$$

Lời giải

a) Ta có $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

$$= \frac{x\sqrt{x}-3-2(\sqrt{x}-3)^2-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-3)(x+8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \sqrt{x}-1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1 + \frac{9}{\sqrt{x}+1} - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức Co6si ta có $P \geq 2 \cdot \sqrt{(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{9}{\sqrt{x}+1}} - 2 = 4$

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}+1 = \frac{9}{\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow \sqrt{x}+1=3 \Leftrightarrow x=4$

Vậy $\min P = 4$ tại $x=4$

b) Ta có $a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca}=0$

$$\Leftrightarrow 2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{a})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a=b=c>0$$

Thay vào $P = 2023 \frac{a^{2023}}{c^{2023}} + 2024 \frac{b^{2024}}{c^{2024}} + 2025 \frac{c^{2025}}{a^{2025}} = 2023 + 2024 + 2025 = 6072$

Câu 2. (0,5 điểm). Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp S . Tính xác suất để lấy được một số chia hết cho 7.

Lời giải

Ta có $S = \{100; 101; 102; \dots; 999\}$

Suy ra không gian mẫu $\Omega = S \Rightarrow n(\Omega) = 900$

Gọi A là biến cố “ lấy được số chia hết cho 7” $\Rightarrow A = \{105; 112; \dots; 994\}$

$$\Rightarrow n(A) = \frac{994 - 105}{7} + 1 = 128.$$

$$\text{Vậy xác suất xảy ra biến cố } A \text{ là } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{128}{900} = \frac{32}{225}$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Một cửa hàng bán gạo trong 4 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày đầu tiên) lượng gạo bán ra bằng $r\%$ lượng gạo còn lại của ngày hôm trước. Tính r biết rằng lượng gạo còn lại sau ngày thứ tư bằng $\frac{1}{16}$ lượng gạo ban đầu.

Lời giải

Điều kiện $r > 0$ (%)

Gọi lượng gạo ban đầu của cửa hàng là A (đơn vị khối lượng, $A > 0$)

Lượng gạo ngày đầu tiên bán được là $A \cdot \frac{r}{100} \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$

Lượng gạo còn lại sau ngày đầu tiên bán là $A - \frac{r}{100} A = A \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$

Lượng gạo bán trong ngày thứ hai là $A \cdot \frac{r}{100} \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)$

Lượng gạo còn lại bán trong ngày thứ hai là $A \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) - A \cdot \frac{r}{100} \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right) = A \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^2$

Tương tự suy ra lượng gạo còn lại sau ngày thứ ba bán là $A \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^3$

Lượng gạo còn lại sau ngày thứ tư bán là $A \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^4$

Theo đề ra ta có phương trình $A \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^4 = \frac{A}{16} \Leftrightarrow 1 - \frac{r}{100} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow r = 50\%$ (thỏa mãn)

Vậy $r = 50\%$.

Câu 4. (1,0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ac} + \frac{1}{c^2+ab} \leq \frac{a+b+c}{2abc}$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{xy+1}.$$

Lời giải

a) Bất đẳng thức đã cho tương đương với $\frac{2abc}{a^2+bc} + \frac{2abc}{b^2+ac} + \frac{2abc}{c^2+ab} \leq a+b+c$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức ta AM-GM ta có $a^2+bc \geq 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{2abc}{a^2+bc} \leq \sqrt{bc}$

Tương tự suy ra $\frac{2abc}{a^2+bc} + \frac{2abc}{b^2+ac} + \frac{2abc}{c^2+ab} \leq \sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab}$ (2)

Áp dụng bất đẳng thức ta AM-GM ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Tương tự suy ra $\sqrt{bc} + \sqrt{ac} + \sqrt{ab} \leq a+b+c$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra đpcm.

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$

b) Ta có $\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{1}{xy+1} = \frac{x^2}{xy+x} + \frac{y^2}{xy+y} + \frac{1}{xy+1} \geq \frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{xy+1}$ (BDT Cauchy Schwarz dạng Engel)

Sử dụng $(x+y)^2 \geq 4xy$ suy ra

$$\frac{(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{1}{xy+1} \geq \frac{(x+y)^2}{\frac{(x+y)^2}{2} + x+y} + \frac{1}{\frac{(x+y)^2}{4} + 1} = \frac{2(x+y)}{x+y+2} = \frac{4}{(x+y)^2 + 4}$$

Đặt $t = x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2$

Ta thấy $\frac{2t}{t+2} + \frac{4}{t^2+4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(t-2)^3}{2(t+2)(t^2+4)} \geq 0$ luôn đúng với mọi $t \geq 2$

Vậy $\min P = \frac{3}{2}$ tại $x=y=1$.

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Cho x, y là các số nguyên dương sao cho $x^2 + 2y$ là số chính phương. Chứng minh rằng $x^2 + y$ là tổng của hai số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$.

Lời giải

a) Theo đề bài: $x^2 + 2y = m^2$ với $m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 2y = m^2 - x^2$$

$\Rightarrow m$ và x cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow \frac{m+x}{2}; \frac{m-x}{2}$ là các số nguyên.

$$\text{Ta có: } x^2 + y = x^2 + \frac{m^2 - x^2}{2} = \frac{2(m^2 + x^2)}{4} = \left(\frac{m-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{m+x}{2}\right)^2$$

Ta có điều phải chứng minh.

$$\text{b) } (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + x^2y^2 - 2xy + 1 + 2(x - y)(1 - xy) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (1 - xy)^2 + 2(x - y)(1 - xy) = 4$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 1 - xy)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (1 - y)^2(x + 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (y - 1)(x + 1) = 2 \quad (\text{vì } x, y \text{ nguyên dương})$$

Do x nguyên dương $\Rightarrow x + 1 \geq 2$ nên ta có $\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ Vậy $(x; y) = (1; 2)$

Câu 6. (1,0 điểm). Cho 2 phương trình: $2x^2 + x - m^2 + 2m - 15 = 0$ (1) và $2x^2 + 3x - m^2 + 2m - 14 = 0$ (2). Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 3x_2x_3$.

Lời giải

Ta thấy cả hai phương trình (1) và (2) có cùng biệt thức $\Delta = 8(m - 1)^2 + 113 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} > 10$ và x_1, x_2 trái dấu; x_3, x_4 trái dấu.

Do $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > 0$ nên $x_2x_3 > 0$ suy ra x_2 và x_3 mang cùng một dấu.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2x_3 = \frac{-1 - \sqrt{\Delta}}{4} \cdot \frac{-3 - \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{\Delta + 4\sqrt{\Delta} + 3}{16} \\ x_2x_3 = \frac{-1 + \sqrt{\Delta}}{4} \cdot \frac{-3 + \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{\Delta - 4\sqrt{\Delta} + 3}{16} \end{cases}$$

Áp dụng định lý Vi-et ta có $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + (x_3 + x_4)^2 - 2x_3x_4$

$$= 2(m-1)^2 + \frac{59}{2} = \frac{1}{4} \cdot (8(m-1)^2 + 113) + \frac{5}{4} = \frac{\Delta + 5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta + 5}{4} = 3 \cdot \frac{\Delta + 4\Delta + 3}{16} \\ \frac{\Delta + 5}{4} = 3 \cdot \frac{\Delta - 4\Delta + 3}{16} \end{cases}$$

Giải (3) ta được $\Delta - 12\sqrt{\Delta} + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Delta} = 1 \text{ (ktm)} \\ \sqrt{\Delta} = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} = 11$

$$\Leftrightarrow 8(m-1)^2 + 113 = 121 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 0 \end{cases}.$$

Giải (4) ta được $\Delta + 12\sqrt{\Delta} + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Delta} = -1 \text{ (ktm)} \\ \sqrt{\Delta} = -11 \text{ (ktm)} \end{cases}$

Vậy $m \in \{0; 2\}$.

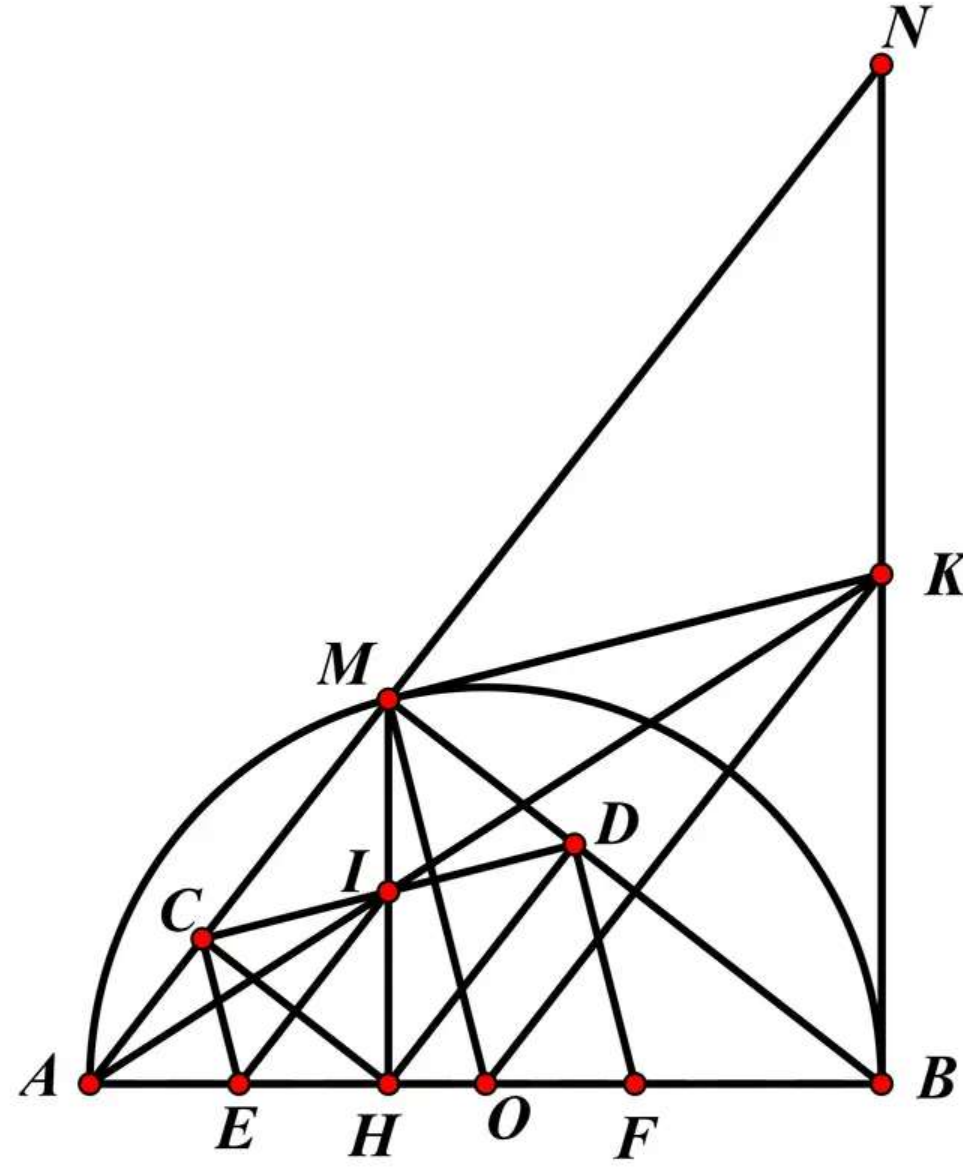
Câu 7. (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho (M khác A và B), H là hình chiếu của M trên AB . Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K .

a) Chứng minh tứ giác $OBKM$ nội tiếp.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA và MB . Gọi I là giao điểm của AK và MH . Chứng minh I là trung điểm CD .

c) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH và BH . Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $OM = OB$, mà $OK \perp MB$ nên OK là đường trung trực của đoạn MB . Khi đó: $KB = KM$ mà KB là tiếp tuyến của (O) và $\triangle OMK = \triangle OBK$ (c-c-c).

$$\Rightarrow KMO = KBO = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OBKM$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

b) Gọi N là giao điểm của BK và AM .

Vì $AN \parallel OK$, mà O là trung điểm AB nên K là trung điểm NB .

Áp dụng định lý Thales, ta có: $\frac{IM}{IH} = \frac{KN}{KB} = 1 \Rightarrow IM = IH$ hay I là trung điểm của MH .

Vì $MCHD$ là hình chữ nhật nên I cũng là trung điểm CD .

c) Vì $MCHD$ là hình chữ nhật nên $IC = IH$.

Xét tam giác ACH vuông tại C có E là trung điểm AH , ta có: $CE = \frac{1}{2}AH = EH$.

Xét hai tam giác IEC và IEH , ta có: $\begin{cases} IE \text{ chung} \\ IC = IH \\ EC = EH \end{cases} \Rightarrow \triangle IEC = \triangle IEH$ (c-c-c)

$\Rightarrow ICE = IHE = 90^\circ$ (hai góc tương ứng).

Tương tự, ta chứng minh được $IDF = 90^\circ$

$\Rightarrow CDFE$ là hình thang vuông.

Diện tích của hình thang vuông $CDFE$ là

$$S = \frac{1}{2} \cdot (CE + DF) \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}AH + \frac{1}{2}BH \right) \cdot MH = \frac{1}{4} \cdot AB \cdot MH.$$

Mặt khác: $MH \leq MO = R$ suy ra $S \leq \frac{1}{4} \cdot AB \cdot MO = \frac{R^2}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{R^2}{2}$ khi $H \equiv O$ hay $MO \perp AB$ nên M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O) .

----- **Hết** -----