

Câu 1:

Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2024$

Tính giá trị của biểu thức $P = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$

Câu 2: Giải các phương trình sau :

a) $2\sqrt{x+1} = 3x - 2$

b) $x + 4 = 4x^2 + 2\sqrt{x+3}$

Câu 3: Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$

a) CMR : $a^4 + 7 \geq 2(a+b)(a+c)$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} + \sqrt{\frac{ca}{b^4+7}} + \sqrt{\frac{ab}{c^4+7}}$

Câu 4: Cho hai pt $x^2 - bx + c = 0(1)$ và $x^2 - b^2x + c^2 = 0(2)$ ($b, c \in \mathbb{Z}$) với x_1, x_2

là hai nghiệm của pt (1) và x_3, x_4 là 2 nghiệm của pt (2) thỏa mãn $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Tính giá trị của b, c

Câu 5: Cho đường tròn tâm $(O; R)$ và dây cung BC thỏa mãn $DB = 2DC$.

a. Tính $\angle BAC$.

b. Tính diện tích $\triangle BDC$ theo R .

c. Gọi K là một điểm AD trên thỏa mãn $\angle CAD = \angle ABK$. Tìm vị trí A của trên cung lớn BC để diện tích $\triangle ABK$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6:

a, Cho p, q là các số nguyên tố thỏa mãn $(p+q)^2 + 3p+q$ là số chính phương. Tìm giá trị của p, q

b, Cho số n là số “tốt” nếu n thỏa mãn là hiệu của hai số chính phương. Hỏi có bao nhiêu số “tốt” không vượt quá 2024.

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Câu 1:

Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2024$

Tính giá trị của biểu thức $P = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right)$

Lời giải

Từ giả thiết ta được : $\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 = 2027$

Do đó $\frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} = 2027$ hay $P = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) = 2007$

Câu 2: Giải các phương trình sau :

a) $2\sqrt{x+1} = 3x-2$

b) $x+4 = 4x^2 + 2\sqrt{x+3}$

Lời giải

a. Điều kiện: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$. Ta có :

$$2\sqrt{x+1} = 3x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4(x+1) = (3x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 9x^2 - 16x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{16}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{16}{9} (T/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{16}{9} \right\}$

b. Điều kiện : $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$. Ta có:

$$x+4 = 4x^2 + 2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x+3-2\sqrt{x+3}+1 = 4x^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-1)^2 = (2x)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}-1 = 2x \\ \sqrt{x+3}-1 = -2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2x+1 \\ \sqrt{x+3} = -2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x+3 = (2x+1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -2x+1 \geq 0 \\ x+3 = (-2x+1)^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{41}}{8} (T/M) \\ x = \frac{5-\sqrt{57}}{8} (T/M) \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm:

$$S = \left\{ x = \frac{-3+\sqrt{41}}{8}; x = \frac{5-\sqrt{57}}{8} \right\}.$$

Câu 3: Cho các số $a, b, c > 0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=3$

a) Chứng minh rằng: $a^4+7 \geq 2(a+b)(a+c)$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} + \sqrt{\frac{ca}{b^4+7}} + \sqrt{\frac{ab}{c^4+7}}$

Lời giải

a. Ta có $a^4+7 = a^4+1+6 \geq 2a^2+2(ab+bc+ca) = 2(a^2+ab+bc+ca) = 2(a+b)(a+c)$

b. Từ câu a, ta được : $\sqrt{\frac{bc}{a^4+7}} \leq \sqrt{\frac{bc}{2(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a+b}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a+c}}$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} \right)$$

Câu 4: Cho hai phương trình $x^2 - bx + c = 0(1)$ và $x^2 - b^2x + c^2 = 0(2)$ ($b, c \in \mathbb{Z}$) với x_1, x_2

Là hai nghiệm của phương trình (1) và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình (2) thỏa mãn $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Tính giá trị biểu thức b, c .

Lời giải

Vì phương trình (1) và (2) đều có nghiệm nên $\Delta_1 = b^2 - 4c \geq 0$ và $\Delta_2 = b^4 - 4c^2 \geq 0$

Áp dụng định lý Viet, ta được : $\begin{cases} x_1 + x_2 = b \\ x_1 x_2 = c \end{cases}$ và $\begin{cases} x_3 + x_4 = b^2 \\ x_3 x_4 = c^2 \end{cases}$

Từ giả thiết ta được $x_3 + x_4 - (x_1 + x_2) = 2$ hay $b^2 - b = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -1 \end{cases}$

Với $b=2$, ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_3 + x_4 = 4$. Từ giả thiết ta được:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 = x_3 - x_4 &\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = (x_3 - x_4)^2 \\&\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4 \\&\Rightarrow 4 - 4c = 16 - 4c^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c^2 - c - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \\ c = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad \text{Loại vì } c \notin \mathbb{Z}$$

Với $b = -1$, ta có $x_1 + x_2 = -1$ và $x_3 + x_4 = 1$. Từ giả thiết ta được:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= x_3 - x_4 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = (x_3 - x_4)^2 \\&\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4 \\&\Rightarrow 1 - 4c = 1 - 4c^2 \\&\Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow \begin{cases} c = 0(\text{nhan}) \\ c = 1(\text{Loai}) \end{cases}\end{aligned}$$

Câu 5. Cho đường tròn tâm $(O; R)$ và dây cung BC thỏa mãn $DB = 2DC$

- a. Tính góc BAC .
b. Tính diện tích $\triangle BDC$ theo R .
c. Gọi K là một điểm trên AD thỏa mãn $\angle CAD = \angle ABK$. Tìm vị trí của A trên cung lớn BC để diện tích ABK đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a. Gọi M là trung điểm của BC . Khi đó $OM \perp BC$ nên $\sin \angle MOC = \frac{MC}{MO} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó $\angle MOC = 60^\circ$,

từ đó suy ra $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle MOC = 60^\circ$

b. Tia phân giác của $\angle BDC$ lần lượt cắt BC và (O) tại L và X ($X \neq D$)

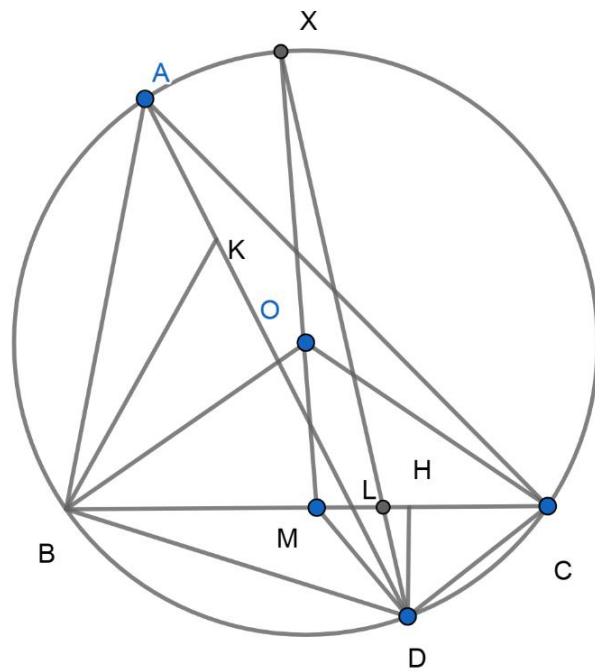
. Khi đó $\frac{LB}{LC} = \frac{DB}{DC} = 2$. Mà $LB + LC = BC = R\sqrt{3}$ nên $LB = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ và

$LC = \frac{R\sqrt{3}}{3}$. Chú ý rằng góc $\angle BDX = \angle CDX$ nên X là điểm chính

giữa cung lớn BC ; khi đó L, O, M thẳng hàng, kéo theo $MX \perp BC$.

Ta có $OM = OC$, $\cos \angle MOC = R \cos 60^\circ = \frac{R}{2}$. Khi đó

$$XM = OM + OX = \frac{R}{2} + R = \frac{3R}{2}. \text{ Từ đó ta được}$$



$$XL = \sqrt{XM^2 + LM^2} = \sqrt{XM^2 + (LB - MB)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3R}{2}\right)^2 + \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3} - \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{21}}{3}$$

Ta có $\triangle XBL \sim \triangle CDL$ nên $\frac{XL}{LC} = \frac{LB}{LD} \Rightarrow XL \cdot LD = LB \cdot LC = \frac{2R^2}{3}$

Do đó

$$LD = \frac{2R^2}{3} : \left(\frac{R\sqrt{21}}{3}\right) = \frac{2R\sqrt{21}}{21}. \text{ Dựng } DH \perp BC (H \in BC), \text{ vì } DH \parallel XM \text{ nên ta có}$$

$$\frac{HD}{XM} = \frac{LD}{XL} = \frac{\frac{2R\sqrt{21}}{21}}{\frac{R\sqrt{21}}{3}} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Khi đó } HD = \frac{2}{7} \cdot XM = \frac{2}{7} \cdot \frac{3R}{2} = \frac{3R}{7}.$$

$$\text{N như vậy } S_{BDC} = \frac{1}{2} DH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3R}{7} \cdot R\sqrt{3} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{14}$$

c. Ta có $\angle ABK = \angle CAD = \angle CBD$, suy ra $\triangle ABK \sim \triangle CBD$. Khi đó $\frac{S_{ABC}}{S_{CBD}} = \frac{AB^2}{BC^2}$ hay $S_{ABK} = \frac{AB^2}{BC^2} \cdot S_{CBD} = \frac{\sqrt{3}}{14} \cdot AB^2$

Như vậy diện tích $\triangle ABK$ lớn nhất khi và chỉ khi AB lớn nhất, điều này tương đương với AB là đường kính.
 Vậy diện tích $\triangle ABK$ lớn nhất khi và chỉ khi AB là đường kính.

Câu 6:

a, Cho p, q là các số nguyên tố thỏa mãn $(p+q)^2 + 3p+q$ là số chính phương. Tìm giá trị của p, q

b, Cho số n là số “tốt” nếu n thỏa mãn là hiệu của hai số chính phương. Hỏi có bao nhiêu số “tốt” không vượt quá 2024.

Lời giải

a) Ta có:

$$(p+q)^2 < (p+q)^2 + 3p+q < (p+q)^2 + 4(p+q) + 4 = (p+q+2)^2$$

Để $(p+q)^2 + 3p+q$ là số chính phương thì

$$(p+q)^2 + 3p+q = (p+q+1)^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 + q^2 + 2pq + 3p+q = p^2 + q^2 + 1 + 2pq + 2p+2q$$

$$\Leftrightarrow p = q+1$$

Do p, q là các số nguyên tố nên ta suy ra $p = 2$ và $q = 3$.

b) Do số chính phương khi chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1 nên hiệu của hai số chính phương bất kỳ khi chia cho 4 chỉ có thể nhận các số dư là 0, 1, 3. Mặt khác, ta có:

$$4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$$

$$4k+1 = (2k+1)^2 - (2k)^2$$

$$4k+3 = (2k+2)^2 - (2k+1)^2$$

Vậy mọi số tự nhiên $4k, 4k+1, 4k+3$ đều có thể viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương nên đều là số “tốt”, từ đó số các số “tốt” không vượt quá 2024 là:

$$\frac{2024}{4} \cdot 3 + 1 = 1519 \text{ (số)}$$