

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 22/10/2020

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Câu 1 (5 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1, \\ u_{n+2} = \frac{\sqrt{3}n}{4n-1} \sin(u_{n+1}) - \frac{1}{4} \cos(u_n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng phương trình

$$x = \frac{\sqrt{3}}{4} \sin x - \frac{1}{4} \cos x$$

có nghiệm duy nhất $x = \alpha$.b) Chứng minh rằng $\lim u_n = \alpha$.

Câu 2 (6 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) ; AH , AK lần lượt là đường cao của tam giác ABC và đường kính của đường tròn (O) . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại D (D khác A) và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại J (J khác I). Gọi M là hình chiếu vuông góc của I trên AH và L là trung điểm của HJ .

a) Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng DM , IK nằm trên đường tròn (O) .b) Chứng minh rằng giao điểm của hai đường thẳng DL , JK nằm trên đường tròn (O) .c) Đường thẳng DK cắt BC tại S sao cho C nằm giữa B và S . Đường thẳng SI cắt AC , AB lần lượt tại Q , P . Chứng minh rằng $\frac{IP}{IQ} = \frac{p-b}{p-c}$, trong đó $b = AC$, $c = AB$ và p là nửa chu vi của tam giác ABC .

Câu 3 (4 điểm). Trường THPT chuyên Hùng Vương – Gia Lai có dự định tổ chức “Trường Đông toán học” cho các bạn học sinh chuẩn bị dự thi VMO 2020. Ban tổ chức đã gửi thư mời tham dự đến một số trường chuyên trong khu vực Miền Trung và Tây Nguyên. Biết rằng, vì điều kiện riêng của mỗi trường, có thể họ không tham gia hoặc sẽ cử không quá 10 em tham gia. Hỏi rằng số lượng học sinh tham gia Trường Đông tối đa là bao nhiêu để đảm bảo rằng luôn (không phụ thuộc vào cách đưa học sinh đến tham dự của các đoàn) có thể chia các em thành 2 lớp, mỗi lớp không quá 35 học sinh và các học sinh ở cùng một đoàn phải học chung cùng một lớp.

Câu 4 (5 điểm).a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln(n+1)$.b) Ký hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x . Chứng minh rằng đa thức

$$P_n(x) = (x+1)^{[\ln(n+1)]} - \left(\frac{x}{1} + 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right) \left(\frac{x}{3} + 1\right) \dots \left(\frac{x}{n} + 1\right)$$

không có nghiệm dương với mọi số nguyên dương n .

Hết

Thí sinh không sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.