

Câu 1. (3,0 điểm)

- a) Tính $A = \sqrt{6 - \sqrt{20}} + \sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 + \sqrt{40}}$
- b) Số tiền mua một máy tính và một bộ sách là 850 nghìn đồng. Nếu lấy số tiền mua máy tính đem chia cho số tiền mua bộ sách thì được thương là 2 và số dư là 100 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi chiếc máy tính và giá mỗi bộ sách là bao nhiêu ?
- c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{y^2} = 0 \\ y + \sqrt{z^2} = 0 \\ z + \sqrt{x^2} = 2024 \end{cases}$$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$

- a) Tìm điều kiện của a để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P .
- b) Tìm tất cả các giá trị thực của a để P nhận giá trị nguyên dương.

Câu 3. (1,5 điểm) Trên mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng $y = mx - 2m + 4$ (d), với m là tham số và O là gốc tọa độ.

- a) Tìm tọa độ điểm A cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m .
- b) Với mỗi giá trị của m , gọi R là bán kính của đường tròn tâm O tiếp xúc (d). Tìm m để bán kính R lớn nhất.

Câu 4. (1,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). Lấy điểm M bất kì trên cạnh AC (M khác A và C) và gọi D là trung điểm của đoạn thẳng MC . Tia BM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E . Chứng minh rằng khi M thay đổi, đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Câu 5. (2,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, CD . Gọi H là hình chiếu của B lên đường thẳng CM và E là trung điểm của đoạn thẳng CH .

- a) Chứng minh rằng $DE \parallel BH$ và AN là đường phân giác góc EAD .
- b) Gọi G là giao điểm của DH và AE , T là giao điểm của AN và BH . Chứng minh rằng MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác GDT .

Câu 6. (0,5 điểm) Trong một cuộc thi, Giám khảo giao nhiệm vụ cho đội của hai bạn Giáp và Thìn như sau: “*Bạn Giáp nghĩ và viết ra giấy bảy số tự nhiên khác nhau có tổng bằng 2024, bí mật cho Giám khảo và chỉ nói với bạn Thìn số lớn thứ tư trong bảy số này. Sau đó bạn Thìn phải đoán ra tất*

cả các số bạn Giáp đã viết”. Hỏi bạn Giáp phải viết ra những số nào để đội của các bạn Giáp, Thìn thắng trong cuộc thi đó, vì sao ?

-----Hết-----

LỜI GIẢI ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 ĐÀ NẴNG 2024-2025

Câu 1.

- a) Tính $A = \sqrt{6 - \sqrt{20}} + \sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 + \sqrt{40}}$
- b) Số tiền mua một máy tính và một bộ sách là 850 nghìn đồng. Nếu lấy số tiền mua máy tính đem chia cho số tiền mua bộ sách thì được thương là 2 và số dư là 100 nghìn đồng. Hỏi giá mỗi chiếc máy tính và giá mỗi bộ sách là bao nhiêu ?

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{y^2} = 0 \\ y + \sqrt{z^2} = 0 \\ z + \sqrt{x^2} = 2024 \end{cases}$$

a)
$$\begin{aligned} A &= \sqrt{6 - \sqrt{20}} + \sqrt{5 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 + \sqrt{40}} \\ &= \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{7 + 2\sqrt{10}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} \\ &= |\sqrt{5} - 1| + |\sqrt{3} + \sqrt{2}| - |\sqrt{5} + \sqrt{2}| \\ &= (\sqrt{5} - 1) + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (\sqrt{5} + \sqrt{2}) \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

- b) Gọi số tiền mua máy tính là x (nghìn đồng) thì số tiền mua bộ sách là $850 - x$ (nghìn đồng)

Điều kiện: $x \in \mathbb{N}^*$ và $x < 750$

Ta có phương trình:

$$x = 2(850 - x) + 100$$

$$\Leftrightarrow 3x = 1800$$

$$\Leftrightarrow x = 600 : \text{nhận}$$

Vậy giá của máy tính và giá của bộ sách lần lượt là 600 nghìn đồng và 250 nghìn đồng.

c)
$$\begin{cases} x + \sqrt{y^2} = 0 \\ y + \sqrt{z^2} = 0 \\ z + \sqrt{x^2} = 2024 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = -x \quad (1) \\ |z| = -y \quad (2) \\ z + |x| = 2024 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$(2) \Rightarrow -y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$$

$$\text{Ta được: } \begin{cases} y = x \\ |z| = -x \\ z - x = 2\,024 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z| + z = 2\,024$$

Nếu $z < 0$ thì $-z + z = 2\,024$: vô lí

Nếu $z \geq 0$ thì $z + z = 2\,024 \Leftrightarrow z = 1\,012$

Ta giải được $x = y = -1\,012$

Câu 2.

Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$

- Tìm điều kiện của a để biểu thức P có nghĩa và rút gọn P .
- Tìm tất cả các giá trị thực của a để P nhận giá trị nguyên dương.

a) Điều kiện: $a > 0$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{a + (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{a + (a-1)}{a} \\ &= \frac{2a-1}{a} \end{aligned}$$

b) Ta có $P = 2 - \frac{1}{a}$

Vì $a > 0$ nên $P = 2 - \frac{1}{a} < 2$

Mà P nguyên dương nên:

$$P = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a-1}{a} = 1$$

$$\Rightarrow 2a - 1 = a$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

Vậy $a = 1$

Câu 3.

Trên mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng $y = mx - 2m + 4$ (d), với m là tham số và O là gốc tọa độ.

- Tìm tọa độ điểm A cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m .
- Với mỗi giá trị của m , gọi R là bán kính của đường tròn tâm O tiếp xúc (d). Tìm m để bán kính R lớn nhất.

- $A(a; b)$ là điểm cố định của (d) nên:

$$b = ma - 2m + 4 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow (a - 2).m = b - 4 \text{ với mọi } m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ b - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $A = (2; 4)$

- Gọi H là tiếp điểm của (d) với đường tròn ($O; R$) thì $OH \perp (d)$

Ta có: $y_A = ax_A$

$$\Leftrightarrow 4 = 2a$$

$$\Leftrightarrow a = 2$$

Lại có: $OA \perp d$

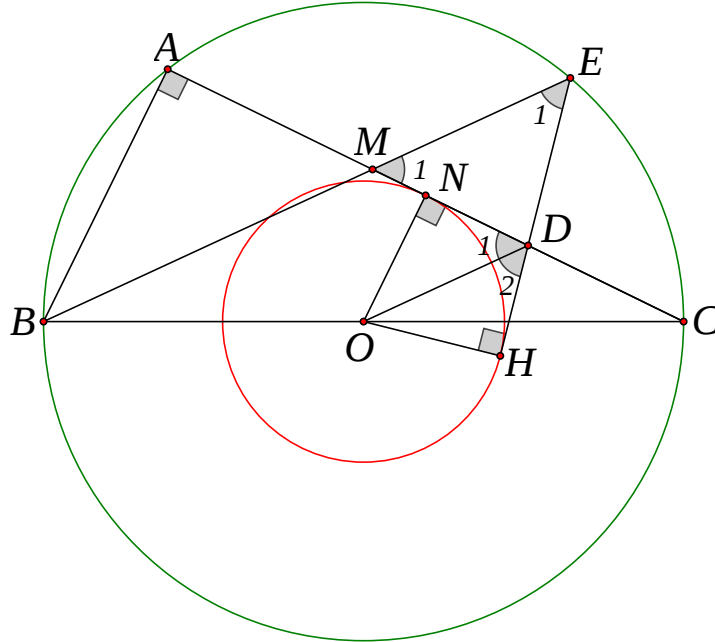
$$\Leftrightarrow a.a' = -1$$

$$\Leftrightarrow 2m = -1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}$$

Vậy $m = \frac{-1}{2}$

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) . Lấy điểm M bất kì trên cạnh AC (M khác A và C) và gọi D là trung điểm của đoạn thẳng MC . Tia BM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E . Chứng minh rằng khi M thay đổi, đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.



Vẽ OH vuông góc ED tại H

Gọi N là trung điểm AC thì N cố định

OD là đường trung bình của $\triangle BMC$ nên $OD \parallel BM$

$$\Rightarrow D_1 = M_1 \text{ và } D_2 = E_1$$

Mà $M_1 = E_1$ (Vì $DM = DE$ theo định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$$\Rightarrow D_1 = D_2$$

Ta chứng minh được $\triangle OND = \triangle OHD$ ($g - c - g$)

$$\Rightarrow OH = ON$$

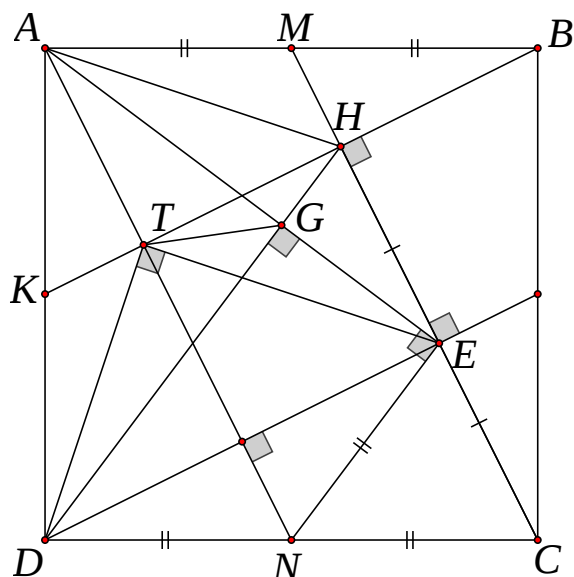
Tức là $H \in (O; ON)$

Vậy DE tiếp xúc với đường tròn $(O; ON)$ và đây là một đường tròn cố định

Câu 5. (2,5 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, CD . Gọi H là hình chiếu của B lên đường thẳng CM và E là trung điểm của đoạn thẳng CH .

a) Chứng minh rằng $DE \parallel BH$ và AN là đường phân giác góc EAD .

b) Gọi G là giao điểm của DH và AE , T là giao điểm của AN và BH . Chứng minh rằng MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác GDT .



a) Gọi K là giao điểm của BH và AD

Ta chứng minh được: $\triangle CBM = \triangle BAK$ ($g - c - g$)

$\Rightarrow BM = AK$

$\Rightarrow K$ là trung điểm AD

Qua D vẽ đường thẳng song song KB và cắt BC tại F

Rõ ràng $BKDF$ là hình bình hành nên $BF = KD$

$\Rightarrow F$ là trung điểm BC

$\Rightarrow EF$ là đường trung bình của $\triangle CBH$

$\Rightarrow EF \parallel BH$

$\Rightarrow \overline{D, E, F}$

Vậy $DE \parallel BH$

Rõ ràng $AMCN$ là hình bình hành nên $AN \parallel MC$

Mà $DE \perp MC$ nên $DE \perp AN$

Mặt khác: $NE = ND$ (định lý đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow NA$ là trung trực của DE

$\Rightarrow NA$ là đường phân giác của EAD

b) Theo tính đối xứng thì $AEN = ADN = 90^\circ$

Mặt khác: NE là đường trung bình của $\triangle DHC$ nên $NE \parallel DH$

$\Rightarrow DG \perp AE$

Rõ ràng MH là đường trung bình của $\triangle ABT$ và H là trung điểm của BT

Ta chứng minh được $\triangle ATB = \triangle BHC$

$\Rightarrow BT = CH$

$\Rightarrow HT = HE$

$\Rightarrow \triangle THE$ vuông cân tại H

$\Rightarrow HTE = 45^\circ$

$$\Rightarrow ETN = 45^\circ$$

$$\Rightarrow DTN = 45^\circ$$

$$\Rightarrow DTE = 90^\circ$$

Cùng với $DGE = 90^\circ$ ta được $DTGE$ là tứ giác nội tiếp trong đường tròn đường kính DE
 Mà $MC \perp DE$ nên MC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔDTG

Câu 6. (0,5 điểm) Trong một cuộc thi, Giám khảo giao nhiệm vụ cho đội của hai bạn Giáp và Thìn như sau: “*Bạn Giáp nghĩ và viết ra giấy bảy số tự nhiên khác nhau có tổng bằng 2024, bí mật cho Giám khảo và chỉ nói với bạn Thìn số lớn thứ tư trong bảy số này. Sau đó bạn Thìn phải đoán ra tất cả các số bạn Giáp đã viết*”. Hỏi bạn Giáp phải viết ra những số nào để đội của các bạn Giáp, Thìn thắng trong cuộc thi đó, vì sao ?

Xét bộ số cần tìm là $a < b < c < d < e < f < g$

Để Thìn luôn đoán được bảy số này thì Giáp phải chọn d hợp lí sao cho bộ bảy số này phải là duy nhất.

Vì $a+b+c \geq 6$ nên $d+e+f+g \leq 2018$

Do đó Giáp phải chọn $d = 503$ để từ đó Thìn nhận ra chỉ có duy nhất bộ $(503, 504, 505, 506)$ có tổng là 2018.

Lúc này $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

Nếu ra theo đề là bảy số tự nhiên thì dù chọn d như thế nào vẫn có nhiều bộ thỏa mãn yêu cầu bài toán và Thìn không thể đoán được.

Chẳng hạn vẫn chọn $d = 503$ thì lúc này sẽ có nhiều bộ có tổng là 2024, chẳng hạn:

$(0, 1, 2, 503, 504, 505, 509)$

$(0, 1, 3, 503, 504, 505, 508)$

$(0, 1, 2, 503, 504, 506, 508)$