

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH THCS NĂM HỌC 2024-2025

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN THI : TOÁN - LỚP 9

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

HẢI DƯƠNG

Câu I (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt{4(x-1)}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$, với

$$x > 1; x \neq 2$$

2) Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng

minh rằng: $Q = \sqrt{\frac{6x^2}{x^2 - y^2 - z^2} + \frac{6y^2}{y^2 - z^2 - x^2} + \frac{6z^2}{z^2 - x^2 - y^2}}$ là một số nguyên.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $2x^2 + 4x + 4 = (2x + 3)\sqrt{x^2 + x + 2}$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 5} + 2y - 1 = 0 \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn

$$3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 24x = -15$$

2) Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ và $3a + 3b + 1$ đều là các số chính phương.

Câu IV (3,0 điểm)

1) Cho $\triangle ABC$ cân tại A , O là trung điểm của BC . Đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB, AC tại H và K . Gọi P, Q là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $POQ = \angle A$.

a) Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

b) HK cắt OQ tại D . Chứng minh rằng PD vuông góc với OQ .

2) Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn và có trục tâm H . Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 + \left(\frac{BC}{HD}\right)^2 + \left(\frac{CA}{HE}\right)^2 \geq 36$$

Câu V (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức
$$P = \frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)} + \frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)} + \frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}$$

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐIỂM**

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
I	1	Rút gọn biểu thức $P = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt{4(x-1)}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$, với $x > 1; x \neq 2$	1,0
		$P = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt{4(x-1)}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ $= \frac{\sqrt{(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$	0,25
		$= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$	0,25
		$= \frac{ \sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1} + 1}{ x-2 } \cdot \frac{x-2}{x-1}$	0,25
		* Nếu $1 < x < 2$ ta có $P = \frac{1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1}{2-x} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{-2}{x-1}$ * Nếu $x > 2$ ta có $P = \frac{\sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1} + 1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$	0,25
		Cho các số thực x, y, z khác 0 thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng: $Q = \sqrt{\frac{6x^2}{x^2 - y^2 - z^2}} + \sqrt{\frac{6y^2}{y^2 - z^2 - x^2}} + \sqrt{\frac{6z^2}{z^2 - x^2 - y^2}}$ là một số nguyên.	1,0
		Ta có: $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -(y + z)$ $\Rightarrow x^2 = [-(y + z)]^2$ $\Rightarrow x^2 = y^2 + z^2 + 2yz$ $\Rightarrow x^2 - y^2 - z^2 = 2yz$ (1)	0,25
		Biến đổi tương tự ta có được: $y^2 - z^2 - x^2 = 2zx$ (2); $z^2 - x^2 - y^2 = 2xy$ (3)	0,25



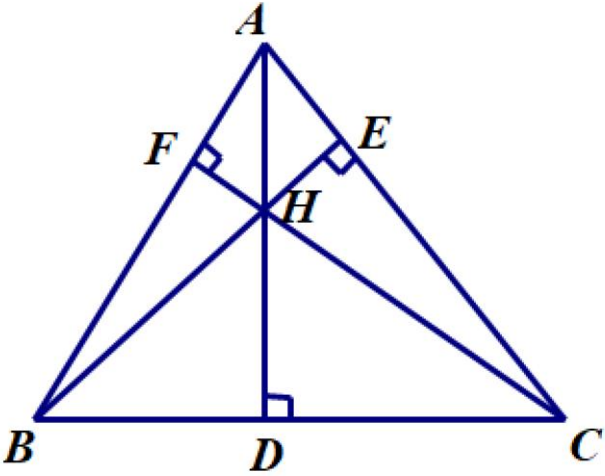
		Thay (1),(2),(3) vào Q ta được: $Q = \sqrt{\frac{6x^2}{2yz} + \frac{6y^2}{2zx} + \frac{6z^2}{2xy}} = \sqrt{\frac{3(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz}}$	
		Ta có, với 3 số x, y, z tùy ý thì $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y)$ $= (x + y + z)^3 - 3(x + y)z(x + y + z) - 3xy(x + y)$ $= (x + y + z)^3 - 3(x + y)(y + z)(z + x)$ Do đó nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$	0,25
		Khi đó $Q = \sqrt{\frac{3(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 3xyz}{xyz}} = 3$ (đpcm)	0,25
II	1	Giải phương trình: $2x^2 + 4x + 4 = (2x + 3)\sqrt{x^2 + x + 2}$ (1)	1,0
		Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2} \Rightarrow x^2 = t^2 - x - 2$ Thay vào phương trình (1) ta có phương trình: $t^2 - (2x + 3)t + x^2 + 3x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow t^2 - (2x + 3)t + (x + 1)(x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow (t - x - 1)(t - x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ t = x + 2 \end{cases}$	0,25
		Với $t = x + 1$ ta có phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 2} = x + 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x + 2 = (x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x + 2 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$	0,25
		Với $t = x + 2$ ta có phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 2} = x + 2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + x + 2 = (x + 2)^2 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + x + 2 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ Vậy phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1, x = -\frac{2}{3}$	0,25



		Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y + 5} + 2y - 1 = 0 & (1) \\ 2(2y^3 + x^3) + 3y(x+1)^2 + 6x(x+1) + 2 = 0 & (2) \end{cases}$	1,0
		Điều kiện: $x^2 + 2y + 5 \geq 0$ Phương trình (2) tương đương: $2(x+1)^3 + 3y(x+1)^2 + 4y^3 = 0$ (*)	0,25
		+ Xét $y = 0$ hệ vô nghiệm + Xét $y \neq 0$. Chia cả hai vế của phương trình (*) cho y^3 và đặt $\frac{x+1}{y} = t$ ta thu được phương trình: $2t^3 + 3t^2 + 4 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (t+2)(2t^2 - t + 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t+2=0 \\ 2t^2 - t + 2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$ Suy ra $t = -2 \Leftrightarrow x+1 = -2y$	0,25
		Thay vào phương trình $\sqrt{x^2 - x - 4} = x + 2 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(t/m)$ Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(0; -\frac{1}{2}\right)$	0,25
III	1	Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 24x = -15$	1,0
		Ta có: $3x^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 - 24x = -15$ $\Leftrightarrow 3(x-4)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$ (1)	0,25
		+ Do $2z^2 : 3$ và 2 là số nguyên tố nên $z^2 : 3$. Mà 3 là số nguyên tố nên $z : 3$ + Từ (1) cũng có $2z^2 < 33 \Rightarrow z^2 < \frac{33}{2} \Rightarrow z \in \{0; 9\}$	0,25
		+ Với $z = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow x \in \{1; 7\}$ (tm)	0,25
		+ Với $z^2 = 9 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$ KL: các số nguyên $(x; y; z)$ thỏa mãn: $(1; 1; 0); (1; -1; 0); (7; 1; 0); (7; -1; 0)$	0,25
	2	Cho a, b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng $2a + 2b + 1$ và $3a + 3b + 1$ đều là các số chính phương.	1,0

		Từ $2a^2 + a = 3b^2 + b$ (1) $\Rightarrow 2a^2 - 2b^2 + a - b = b^2$ $\Rightarrow (a - b)(2a + 2b + 1) = b^2$ (2)	0,25
		Mặt khác từ (1) ta có: $3a^2 - 3b^2 + a - b = a^2$ $\Rightarrow (a - b)(3a + 3b + 1) = a^2$ $\Rightarrow (a - b)^2 (2a + 2b + 1)(3a + 3b + 1) = a^2 b^2$ $\Rightarrow (2a + 2b + 1)(3a + 3b + 1) \text{ là số chính phương (3)}$	0,25
		Gọi $(2a + 2b + 1; 3a + 3b + 1) = d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow (2a + 2b + 1):d; (3a + 3b + 1):d$ $\Rightarrow (3a + 3b + 1) - (2a + 2b + 1) = (a + b):d$ $\Rightarrow 2(a + b):d \Rightarrow (2a + 2b + 1) - 2(a + b) = 1:d \text{ nên } d = 1$	
		$\Rightarrow (2a + 2b + 1; 3a + 3b + 1) = 1$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $2a + 2b + 1$ và $3a + 3b + 1$ đều là các số chính phương	0,25
IV	1a	Cho $\triangle ABC$ cân tại A, O là trung điểm của BC. Đường tròn tâm O tiếp xúc với hai cạnh AB, AC tại H và K. Gọi P, Q là hai điểm lần lượt thuộc các cạnh AB và AC sao cho $POQ = \angle BAC$. Chứng minh rằng PQ là tiếp tuyến của đường tròn (O).	1,0

	Kẻ OI vuông góc với PQ tại I. Vì $\triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow B = C$ Ta có: $BOP + POQ + QOC = 180^\circ$ $BOP + B + BPO = 180^\circ$ Mà $POQ = B \Rightarrow BPO = QOC$	0,25
	$\triangle BPO$ và $\triangle COQ$ có: $B = C; BPO = QOC \Rightarrow \triangle BPO \sim \triangle COQ (g.g) \Rightarrow \frac{BP}{CO} = \frac{PO}{OQ}$	0,25
	Mà $BO = CO \Rightarrow \frac{BP}{BO} = \frac{PO}{OQ}$ $\triangle BOP$ và $\triangle OQP$ có $POQ = B; \frac{BP}{BO} = \frac{PO}{OQ} \Rightarrow \triangle BOP \sim \triangle OQP (c.g.c)$	0,25
	$\Rightarrow BPO = OPQ \Rightarrow OH = OI$ Suy ra I thuộc đường tròn (O) mà OI vuông góc với PQ. Suy ra PQ là tiếp tuyến của (O)	0,25
1b	HK cắt OQ tại D. Chứng minh rằng PD vuông góc với OQ.	1,0
	Vì AH và AK là hai tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AH = AK$ $\triangle AHK$ cân tại A $\Rightarrow \angle AHK = \angle ABC = \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} \Rightarrow \angle AHK = \angle POQ \text{ hay } \angle PHE = \angle EOD \text{ với } E \text{ là}$ giao điểm của HK và OP	0,25
	$\triangle HEP$ và $\triangle OED$ có: $\angle PHE = \angle EOD; \angle HEP = \angle OED \Rightarrow \triangle HEP \sim \triangle OED (g.g) \Rightarrow \angle HPE = \angle ODE; \frac{EH}{EO} = \frac{EP}{ED}$	0,25
	$\triangle PED$ và $\triangle HEO$ có: $\angle PED = \angle HEO; \frac{EH}{EO} = \frac{EP}{ED} \Rightarrow \triangle PED \sim \triangle HEO (c.g.c) \Rightarrow \angle PDE = \angle HOE;$	0,25
	$\Rightarrow \angle PDO = \angle PDE + \angle EDO = \angle EOH + \angle HPE = 90^\circ \Rightarrow PD \perp OQ$	0,25
2	Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn và có trục tâm H. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Chứng minh rằng:	1,0

	$\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 + \left(\frac{BC}{HD}\right)^2 + \left(\frac{CA}{HE}\right)^2 \geq 36$	
		
	Ta có: $\triangle ACD \sim \triangle BHD$ và $\triangle ABD \sim \triangle AHF \Rightarrow \frac{AC}{BH} = \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{HF}$ (1) Tương tự $\triangle BCE \sim \triangle AHE$ và $\triangle ABE \sim \triangle HBF \Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{BE}{AE} = \frac{FB}{HF}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có: $\frac{AB}{HF} = \frac{AF + FB}{HF} = \frac{AF}{HF} + \frac{FB}{HF} = \frac{AC}{BH} + \frac{CB}{AH}$ $\Rightarrow \left(\frac{AB}{HF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BH} + \frac{CB}{AH}\right)^2 \geq 4 \frac{AC.CB}{BH.AH}$ (3)	0,25
	Lại có $\triangle BCF \sim \triangle HAF \Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{CF}{AF}$ Từ (1) và (3) $\Rightarrow \left(\frac{AB}{HF}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{CF}{HF} = 4 \cdot \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle HAB}}$ (4) Tương tự ta có $\left(\frac{BC}{HD}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle HBC}}$ (5); $\left(\frac{AC}{HE}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle HAC}}$ (6)	0,25
	Do đó: $\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 + \left(\frac{BC}{HD}\right)^2 + \left(\frac{CA}{HE}\right)^2 \geq 4.S_{\triangle ABC} \cdot \left(\frac{1}{S_{\triangle HAB}} + \frac{1}{S_{\triangle HBC}} + \frac{1}{S_{\triangle HAC}}\right)$ $\geq \frac{36.S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle HAB} + S_{\triangle HBC} + S_{\triangle HAC}} = 36$	0,25





	Đẳng thức xảy ra $S_{\Delta HAB} = S_{\Delta HBC} = S_{\Delta HCA} \Leftrightarrow H$ là trọng tâm ΔABC mà H là trực tâm ΔABC nên ΔABC đều (khi đó các bất đẳng thức (4),(5),(6) cùng xảy ra đẳng thức).	
V	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a(bc+1)^2}{c^2(ca+1)} + \frac{b(ca+1)^2}{a^2(ab+1)} + \frac{c(ab+1)^2}{b^2(bc+1)}$	1,0
	Ta có: $P = \frac{(bc+1)^2}{\frac{c^2}{a}} + \frac{(ca+1)^2}{\frac{a^2}{b}} + \frac{(ab+1)^2}{\frac{b^2}{c}} = \frac{\left(b + \frac{1}{c}\right)^2}{c + \frac{1}{a}} + \frac{\left(c + \frac{1}{a}\right)^2}{a + \frac{1}{b}} + \frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^2}{b + \frac{1}{c}}$	0,25
	Áp dụng BĐT: $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3} \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3}$ Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$ Ta có: $P = \frac{\left(b + \frac{1}{c}\right)^2}{c + \frac{1}{a}} + \frac{\left(c + \frac{1}{a}\right)^2}{a + \frac{1}{b}} + \frac{\left(a + \frac{1}{b}\right)^2}{b + \frac{1}{c}} \geq \frac{\left(a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ $P \geq a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$	0,25
	$\Rightarrow P \geq a + b + c + \frac{9}{a + b + c} = \left[a + b + c + \frac{9}{4(a + b + c)} \right] + \frac{27}{4(a + b + c)}$ Ta có: $a + b + c + \frac{9}{4(a + b + c)} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{4}} = 3$; $\frac{27}{4(a + b + c)} \geq \frac{27}{4 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{9}{2}$	0,25
	$\Rightarrow P \geq 3 + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$ Vậy $\min P = \frac{15}{2}$ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$	0,25