

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) . Tìm a để (P) đi qua điểm $I(-\sqrt{3}; 9)$

b) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m-3)x + 2m^2 - m$ và $(d_2): y = 1 - 2x$, với m là tham số. Tìm m biết (d_1) cắt (d_2) và (d_1) đi qua điểm $M(4; -7)$

c) Rút gọn biểu thức $T = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{9}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \right] \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0, x \neq 9$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình bậc hai $3x^2 - 2x + 5 - 2m = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\frac{1}{2}$

Câu 3. (1,0 điểm) Giải phương trình : $\sqrt{3x+2} - 3\sqrt{2-x} - 3x + 4 = 0$

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình :

$$(2x - y + 3)^2 = 3(x - 3y - y^2 + 2)$$

Câu 5. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 37 \\ 4x^2 - 3y^2 = 16x - 9y \end{cases}$$

Câu 6. (1,0 điểm) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $16x + 7y + 13z = 15$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2xy}{2x+y} + \frac{3yz}{2y+z} + \frac{7zx}{2z+x}$

Câu 7. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác AD ($D \in BC$) và $\angle ABC = 60^\circ$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC và cắt hai đường thẳng AC, AB lần lượt tại E, F

- Chứng minh tứ giác $ADCF$ nội tiếp trong một đường tròn
- Gọi I là trung điểm của CF . Chứng minh tam giác CDF là tam giác vuông cân và $DI \parallel BE$
- Cho diện tích tam giác BCF bằng $9 - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Tính độ dài cạnh AB

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

d) Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) có đồ thị (P) . Tìm a để (P) đi qua điểm $I(-\sqrt{3}; 9)$

$$\text{Vì } I(-\sqrt{3}; 9) \in (P) \Rightarrow 9 = a \cdot (-\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow a = 3$$

e) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m-3)x + 2m^2 - m$ và $(d_2): y = 1 - 2x$, với m là tham số. Tìm m biết (d_1) cắt (d_2) và (d_1) đi qua điểm $M(4; -7)$

Vì (d_1) đi qua điểm

$$M(4; -7) \Rightarrow -7 = (m-3) \cdot 4 + 2m^2 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \Rightarrow (d_1): y = -2x + 1 \equiv (d_2) \text{ (ktm)} \\ m = \frac{-5}{2} \Rightarrow (d_1): y = \frac{-11}{2}x + 15 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{5}{2}$$

f) Rút gọn biểu thức $T = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{9}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-3)} \right] \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0, x \neq 9$

$$T = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{9}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-3)} \right] \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+3} = \frac{x-9}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+3} = \frac{2(x-9)}{\sqrt{x} \cdot (x-9)} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Câu 2. (1,0 điểm) Cho phương trình bậc hai $3x^2 - 2x + 5 - 2m = 0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\frac{1}{2}$

$$\text{Đặt phương trình bậc hai } 3x^2 - 2x + 5 - 2m = 0 \quad (1) \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 3(5-2m) = 6m-14$$

$$\text{Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta' = 6m-14 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{3} \quad (2)$$

$$\text{Khi đó theo hệ thức Vi-et ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{5-2m}{3} \end{cases}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn đề bài :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{3} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{5-2m}{3} > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{5}{2} \\ (x_1 + x_2) \cdot 2 - 2x_1 x_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{5}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5-2m}{3} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{113}{48} (tm(2))$$

Vậy $m = \frac{113}{48}$

Câu 3. (1,0 điểm) Giải phương trình : $\sqrt{3x+2} - 3\sqrt{2-x} - 3x + 4 = 0$

ĐKXD: $\frac{-2}{3} \leq x \leq 2$. Ta có :

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+2} - 3\sqrt{2-x} - 3x + 4 = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{3x+2} - 3\sqrt{2-x} = 3x - 4 \Leftrightarrow \frac{3x+2-9(2-x)}{\sqrt{3x+2} + 3\sqrt{2-x}} = 3x - 4 \\ & \Leftrightarrow \frac{4(3x-4)}{\sqrt{3x+2} + 3\sqrt{2-x}} = 3x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} (tm) \\ \sqrt{3x+2} + 3\sqrt{2-x} = 4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 36x^2 - 48x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{3} (tm) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{4}{3}; \frac{2 \pm \sqrt{12}}{3} \right\}$

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình :

$$(2x - y + 3)^2 = 3(x - 3y - y^2 + 2)$$

Ta có: $(2x - y + 3)^2 = 3(x - 3y - y^2 + 2)(2x - y + 3)^2 = 3(x - 3y - y^2 + 2)$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + y^2 + 9 - 4xy - 6y + 12x = 3x - 9y - 3y^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4y^2 + 3 - 4xy + 3y + 9x = 0$$

$$\Leftrightarrow 64x^2 + 64y^2 + 48 - 64xy + 48y + 144x = 0$$

$$\Leftrightarrow (8x)^2 + (-4y)^2 + 9^2 - 64xy + 144x - 72y + 48y^2 + 120y = 33$$

$$\Leftrightarrow (8x - 4y + 9)^2 + 3(4y + 5)^2 = 108 (*) \Rightarrow 3(4y + 5)^2 \leq 108 \Rightarrow (4y + 5)^2 \leq 36$$

Mặt khác từ (*) suy ra $(8x - 4y + 9)^2 : 3 \Rightarrow (8x - 4y + 9)^2 : 9$ mà $108 : 9 \Rightarrow (4y + 5)^2 : 9$

Mà $(4y+5)^2$ là số chính phương lẻ nên $(4y+5)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 4y+5=3 \\ 4y+5=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} (ktm) \\ y = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

Vậy $(x; y) = (-1; -2)$

Câu 5. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 - y^3 = 37 & (1) \\ 4x^2 - 3y^2 = 16x - 9y & (2) \end{cases}$

Từ hệ phương trình ta có : $4x^2 - 3y^2 + 64 - 27 = 16x - 9y + x^3 - y^3$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 16x - 64 = y^3 - 3y^2 + 9y - 27$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^3 = (y-3)^3 \Rightarrow x-4 = y-3 \Rightarrow x = y+1$$

Thế vào phương trình (1) ta được $(y+1)^3 - y^3 = 37 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \Rightarrow x = -3 \\ y = 3 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \{(-3; -4); (4; 3)\}$

Câu 6. (1,0 điểm) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $16x + 7y + 13z = 15$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2xy}{2x+y} + \frac{3yz}{2y+z} + \frac{7zx}{2z+x}$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$ với $x, y, z > 0$ ta được :

$$\frac{1}{x+x+y} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \Rightarrow \frac{2xy}{2x+y} \leq \frac{1}{9} (4y+2x)$$

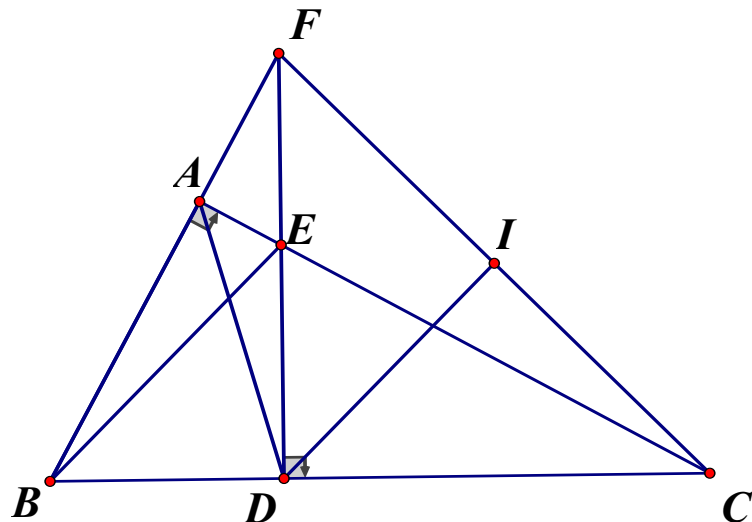
$$\text{Tương tự : } \frac{3yx}{2y+z} \leq \frac{1}{9} (6z+3y); \frac{7zx}{2z+x} \leq \frac{1}{9} (14x+7z)$$

Do đó $A = \frac{2xy}{2x+y} + \frac{3yz}{2y+z} + \frac{7zx}{2z+x} \leq \frac{1}{9} (16x+7y+13z)$ mà $16x+7y+13z = 15$ nên:

$$A \leq \frac{15}{9} \Leftrightarrow A \leq \frac{5}{3}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x = y = z = \frac{5}{12}$$

Vậy $\text{Max } A = \frac{5}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{5}{12}$

Câu 7. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác AD ($D \in BC$) và $\angle ABC = 60^\circ$. Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với BC và cắt hai đường thẳng AC, AB lần lượt tại E, F



d) Chứng minh tứ giác $ADCF$ nội tiếp trong một đường tròn

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle ACB = 30^\circ$

Lại có $DF \perp BC$ tại $D \Rightarrow \angle FDB = \angle FDC = 90^\circ$

Xét $\triangle BDF$ có $\angle FDB = 90^\circ$ và $\angle FBD = \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle BFD = 30^\circ$ hay $\angle AFD = 30^\circ$

Xét tứ giác $ADCF$ có $\angle AFD = \angle ACD = 30^\circ$ nên tứ giác $ADCF$ nội tiếp một đường tròn

e) Gọi I là trung điểm của CF . Chứng minh tam giác CDF là tam giác vuông cân và $DI \parallel BE$

Do AD là phân giác của $\triangle ABC \Rightarrow \angle BAD = \angle CAD = 45^\circ$ mà tứ giác $ADCF$ nội tiếp nên $\angle CFD = \angle CAD \Rightarrow \angle CFD = 45^\circ$

Xét $\triangle CFD$ có $\angle CFD = 45^\circ, \angle FDC = 90^\circ \Rightarrow \angle FCD = 45^\circ$

Khi đó $\triangle CFD$ vuông cân tại D , mà I là trung điểm của $CF \Rightarrow DI \perp FC$ (1)

Xét $\triangle BCF$ có $FD \perp BC, CA \perp BF$ và $FD \cap CA = \{E\} \Rightarrow BE \perp CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DI \parallel BE$

f) Cho diện tích tam giác BCF bằng $9 - 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Tính độ dài cạnh AB

Do tứ giác $ADCF$ nội tiếp nên $\angle BAD = \angle DCF$ hay $\angle BAD = \angle BCF$

Do đó $\triangle ABD \sim \triangle CBF$ (g.g)

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 = \frac{S_{ABD}}{S_{CBF}} \text{ mà } \frac{AB}{BC} = \cos B = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{CBF}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Mặt khác : } S_{BCF} = 9 - 3\sqrt{3}cm^2 \Rightarrow S_{ABD} = \frac{9 - 3\sqrt{3}}{4}cm^2$$

$$\text{Do } AD \text{ là phân giác của } \triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

$$\text{Mà } \frac{S_{ABD}}{S_{CAD}} = \frac{DB}{DC}; \frac{AB}{AC} = \cot B = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Nên } \frac{S_{ABD}}{S_{CAD}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \Rightarrow S_{ABC} = (\sqrt{3} + 1) \frac{9 - 3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} (cm^2)$$

$$\text{Lại có : } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = 3 \Rightarrow AB = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } AB = \sqrt{3}cm$$