

(Đề thi gồm 05 bài, 01 trang)

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Chứng minh $P > 4$.

b) Tìm giá trị của a để biểu thức $Q = \frac{8}{P}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 + 2m - 2x + m^2 - 2m + 4 = 0$ (với m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{30}{x_1^2 + x_2^2} - \frac{15}{x_1 x_2} = \frac{1}{m}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x-1} + y\sqrt{y-1} = 2\sqrt{xy} \\ x + y = xy \end{cases}$.

Bài 3. (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên tố p, q sao cho tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện:

$$pq \mid n+1 \iff p+q \mid n^2+1.$$

b) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} = 3\sqrt{2}$.

Chứng minh: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp O , $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại điểm P . Từ D kẻ đường thẳng song song với EF cắt đường thẳng AB tại điểm R , cắt đường thẳng AC tại điểm Q .

a) Chứng minh tứ giác $BQCR$ nội tiếp.

b) Cho AP cắt O tại điểm thứ hai là K . Chứng minh tứ giác $AEFK$ nội tiếp.

c) Cho dây BC của O cố định. Chứng minh khi điểm A di chuyển trên cung lớn BC thì đường tròn ngoại tiếp $\triangle PQR$ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. (1,0 điểm)

Để phục vụ cho giai đoạn cuối làm quảng trường Lễ hội Hoa Phượng đỏ của thành phố Hải Phòng, xe tải của bác An phải chạy 29 ngày liên tục. Mỗi ngày xe chạy ít nhất 1 chuyến, tổng số chuyến xe đã chạy là 48. Chứng minh trong mọi trường hợp, tổng số chuyến xe bác An đã chạy trong một số ngày liên tiếp là 28 chuyến.

-----HẾT-----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi 1: Cán bộ coi thi 2:

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

(Hướng dẫn chấm gồm 05 bài, 05 trang)

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 1 (2 điểm)	1a. (1,0 điểm)	
	Do $a > 0, a \neq 1$ nên $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$	0,25
	Ta có $\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$	0,25
	$\Rightarrow P = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} + \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$	0,25
	Giả sử $P > 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} > 4 \Leftrightarrow \sqrt{a}+1 > 4\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a}-1 > 0$ luôn đúng vì $a > 0, a \neq 1$. Vậy $P > 4$	0,25
	1b. (1,0 điểm)	
	Theo phần a) $P > 4 \Rightarrow 0 < Q = \frac{8}{P} < \frac{8}{4} \Rightarrow 0 < Q < 2$. Để Q nhận giá trị nguyên thì $Q = 1$	0,25
	Ta có $Q = 1 \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a-6\sqrt{a}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}-3=8$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{a} = 3+2\sqrt{2}$ hoặc $\sqrt{a} = 3-2\sqrt{2}$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy, $a = 3 \pm 2\sqrt{2}$ thì Q nhận giá trị nguyên.	0,25
Bài 2 (2 điểm)	2 a. (1,0 điểm)	
	Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m-2 > 0 \Leftrightarrow m^2-2m+4 > 0 \Leftrightarrow m < 0$.	0,25
	Với $m < 0$ theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1+x_2=4-2m \\ x_1x_2=m^2-2m+4 \neq 0 \forall m \end{cases}$	
	Ta có $\frac{30}{x_1^2+x_2^2} - \frac{15}{x_1x_2} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{30}{x_1+x_2^2-2x_1x_2} - \frac{15}{x_1x_2} = \frac{1}{m}$ $\Leftrightarrow \frac{15}{m^2-6m+4} - \frac{15}{m^2-2m+4} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{15}{m+\frac{4}{m}-6} - \frac{15}{m+\frac{4}{m}-2} = 1$	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	Đặt $m + \frac{4}{m} = t$ do $m < 0 \Rightarrow t < 0$. Ta có (1) trở thành $\frac{15}{t-6} - \frac{15}{t-2} = 1 \Leftrightarrow t-12 \quad t+4 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = 12 \end{cases} \Rightarrow t = -4$ do $t < 0$	0,25
	Với $t = -4$ ta có $m + \frac{4}{m} = -4 \Leftrightarrow m + 2^2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn)	0,25
	b. (1,0 điểm)	
	Điều kiện $x, y \geq 1$. Từ $x\sqrt{x-1} + y\sqrt{y-1} = 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{x-1}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x}} = 2$ Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $VT \geq 2 \cdot \sqrt[4]{x-1} \sqrt[4]{y-1} = 2 \cdot \sqrt[4]{xy - x + y + 1} = 2$ vì $x + y = xy$ Dấu “=” xảy ra khi $x\sqrt{x-1} = y\sqrt{y-1}$ *	0,25
	Nếu $x = y \geq 1$ thỏa mãn * Nếu $x > y \geq 1$ thì $x\sqrt{x-1} > y\sqrt{y-1}$ (loại) Nếu $y > x \geq 1$ thì $x\sqrt{x-1} < y\sqrt{y-1}$ (loại) Vậy $x = y$	0,25
	Thay $x = y$ vào $x + y = xy \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ loại} \\ x = 2 \text{ t/m} \end{cases}$	0,25
	Vậy hệ phương trình có nghiệm $x; y = 2; 2$	0,25
	3a. (1,0 điểm)	
	Nếu $p = q$ thì $p = \frac{2(n^2 + 1)}{n + 1} = 2n - 2 + \frac{4}{n + 1}$. Do $n \in \mathbb{N}$ và p là số nguyên tố nên $4 : (n + 1) \Rightarrow n = 0; n = 1; n = 3$ $\Rightarrow p = 2; p = 5$.	0,25
	Nếu $p \neq q$ thì pq và $p + q$ là nguyên tố cùng nhau vì pq chỉ chia hết cho các ước nguyên tố là p và q còn $p + q$ thì không chia hết cho p và không chia hết cho q. Gọi r là một ước chung của $n^2 + 1$ và $n + 1$ $\Rightarrow [(n + 1)(n - 1)] : r \Rightarrow (n^2 - 1) : r$ $\Rightarrow [(n^2 + 1) - (n^2 - 1)] : r \Rightarrow 2 : r \Rightarrow r = 1$ hoặc $r = 2$.	0,25
Bài 3 (2 điểm)	+) $r = 1$ suy ra $p + q = n + 1, pq = n^2 + 1 \Rightarrow p, q$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - (n + 1)x + n^2 + 1 = 0$ vô nghiệm do $\Delta = -3n^2 + 2n - 3 = -(n - 1)^2 - (2n^2 + 2) < 0$	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	+) $r = 2$ suy ra $2pq = n^2 + 1$ và $2(p + q) = n + 1 \Rightarrow p, q$ là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - (n + 1)x + n^2 + 1 = 0$ vô nghiệm. Vậy bộ các số nguyên tố $p; q$ cần tìm là $(p; q) = (2; 2); (p; q) = (5; 5)$.	0,25
	3b. (1,0 điểm)	
	Ta có $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Tương tự, suy ra $\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} \geq \frac{a^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2)}} + \frac{b^2}{\sqrt{2(c^2 + a^2)}} + \frac{c^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}$	0,25
	Đặt $x = \sqrt{b^2 + c^2} > 0, y = \sqrt{c^2 + a^2} > 0, z = \sqrt{a^2 + b^2} > 0,$ $\Rightarrow x + y + z = 3\sqrt{2}.$ suy ra $VT \geq \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2\sqrt{2}x} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2\sqrt{2}y} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2\sqrt{2}z}$ $\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y + z)^2}{2x} - x \right) + \left(\frac{(z + x)^2}{2y} - y \right) + \left(\frac{(x + y)^2}{2z} - z \right) \right]$	0,25
	$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{(y + z)^2}{2x} + 2x - 3x \right) + \left(\frac{(z + x)^2}{2y} + 2y - 3y \right) + \left(\frac{(x + y)^2}{2z} + 2z - 3z \right) \right]$ $\geq \frac{1}{2\sqrt{2}} [2(y + z) - 3x + 2(z + x) - 3y + 2(x + y) - 3z]$	0,25
	Suy ra $VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} x + y + z = \frac{3}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \sqrt{2}$ Vậy $\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} \geq \frac{3}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.	0,25
Bài 4 (3 điểm)	Hình vẽ	

Bài	Đáp án	Điểm
	4a. (1,0 điểm)	
	Ta có $BEC = BFC = 90^0 \Rightarrow BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow BCE = BFP$	0,5
	Mà $BFP = BRQ$ (so le trong và $RQ//EP$)	0,25
	$\Rightarrow BCE = BRQ \Rightarrow BQCR$ nội tiếp.	0,25
	4b. (1,0 điểm)	
	Vì $AKBC$ nội tiếp $\Rightarrow PK.PA = PB.PC$	0,25
	Vì $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow PE.PF = PB.PC$	0,25
	Suy ra $PK.PA = PE.PF \Rightarrow AEFK$ nội tiếp 1	0,5
	4c. (1,0 điểm)	
	Mà $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH 2 Từ 1, 2 $\Rightarrow A, E, H, F, K$ cùng thuộc đường tròn đường kính AH . Kéo dài KH cắt BC tại M , cắt O tại điểm thứ hai là N . Vì $NK \perp AK \Rightarrow AN$ là đường kính của O Ta có $BH \perp AC, NC \perp AC \Rightarrow BH//NC$ 3 $CH \perp AB, NB \perp AB \Rightarrow CH//NB$ 4 Từ 3, 4 $\Rightarrow BHCN$ là hình bình hành $BM = MC = ME$	0,25
	Ta có $DME = 2.ACB$ (tính chất góc ngoài của tam giác cân) 5 Do $ACDF$ nội tiếp $\Rightarrow BFD = ACB$ Do $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow BFP = ACB \Rightarrow DFP = 2.ACB$ 6 Từ 5, 6 $\Rightarrow DME = DFP \Rightarrow DMEF$ nội tiếp. Mà $MDE = FDP$ (cùng bằng BAC) $\Rightarrow \triangle DEM \sim \triangle DPF$ g.g $\Rightarrow \frac{DE}{DP} = \frac{DM}{DF} \Rightarrow DE.DF = DP.DM$ *	0,25
	Ta có $FRD = RFD = RFP \Rightarrow \triangle DRF$ cân tại $D. \Rightarrow DF = DR$ 7 Ta có $DEQ = DEM + MEC$ Ta có $DQE = QDC + QCD = DPF + MEC = DEM + MEC$ Suy ra $DEQ = DQE \Rightarrow \triangle DQE$ cân tại $D. \Rightarrow DQ = DE$ 8	0,25
	Thay 7, 8 vào * ta được $DQ.DR = DM.DP \Rightarrow PRMQ$ nội tiếp Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua trung điểm M của BC cố định. (đpcm)	0,25
Bài 5 (1 điểm)	Bài 5. (1,0 điểm)	
	Gọi S_n là tổng số chuyến xe từ ngày thứ nhất đến hết ngày thứ n . $\Rightarrow 1 \leq S_n \leq 48$ với $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 29$ Do $i \neq k, 1 \leq i, k \leq 29$ nên $S_i \neq S_k$	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	Ta có 29 tổng S_n nên tồn tại hai số i và k $1 \leq i < k \leq 29$ sao cho $S_i \equiv S_k \pmod{28} \Rightarrow S_k - S_i \vdots 28$	0,25
	Vì $0 < S_k - S_i < 48$ nên $S_k - S_i = 28$	0,25
	Vậy kể từ chuyến xe $i+1$ đến chuyến xe thứ k $k > i+1$ thì tổng số chuyến xe của bác An đã chạy đúng 28 chuyến.	0,25

Chú ý:

- Thí sinh làm theo cách khác nếu đúng thì cho điểm tối đa.
- Tổng điểm bài thi: 10 điểm .

----- Hết -----