

Câu I (4.0 điểm).

- 1) Tìm điều kiện của x để biểu thức $A = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ có nghĩa. Tìm x để $A = \frac{4}{3}$.
- 2) Tính giá trị của biểu thức $P = (x^3 - x^2 - 3)^{2024}$ với $x = \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$.

Câu II (5.0 điểm).

- 1) Cho đa thức $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 2$ thỏa mãn $f(-1) = 2024$. Tính $f(1)$.
- 2) Hiện nay số tuổi của chú và cháu là 91 tuổi. Biết rằng số tuổi của chú hiện nay gấp đôi số tuổi của cháu vào thời điểm mà số tuổi của chú bằng số tuổi của cháu hiện nay. Tìm số tuổi của chú và số tuổi của cháu hiện nay.
- 3) Tìm số tự nhiên n có 4 chữ số sao cho tổng của chữ số hàng nghìn và chữ số hàng trăm của n bằng 15, đồng thời n chia hết cho 2, 5 và 9.

Câu III (3.0 điểm).

- 1) Giải phương trình $x^2 + 2\sqrt{3x-2} + 2 = 5x$.
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 2y = y^3 + x \\ y^2 = 2(1-x^2) \end{cases}.$$

Câu IV (4.0 điểm). Cho tam giác ABC có $AB = 3\text{ cm}$, $AC = 4\text{ cm}$, $BAC = 120^\circ$. Gọi AD là phân giác trong của góc A của $\triangle ABC$ ($D \in BC$).

- 1) Tính diện tích tam giác ABC , biết rằng $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 2) Tính độ dài đoạn thẳng AD .

Câu V (4.0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung AB, CD bất kì. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Gọi E, F lần lượt là giao điểm của MC và MD với dây AB . Gọi I và J lần lượt là giao điểm của DE và CF với đường tròn (O) . Chứng minh rằng $AI = BJ$.

----- HẾT -----

Ghi chú: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Câu I (4.0 điểm).

$$1) \text{ĐKXD: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+1 \neq \sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Ta có

$$A = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3x = 4x+4-4\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x+4 = 4\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow x^2-8x=0 \Leftrightarrow x(x-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 (l) \\ x=8 (tm). \end{cases}$$

$$2) \text{Ta có } x = \frac{(\sqrt{5}+1)\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)} = \frac{5-1}{2} = 2.$$

$$\text{Khi đó } P = (2^3 - 2^2 - 3)^{2024} = 1.$$

Câu II (5.0 điểm).

$$1) f(-1) = -a-b-c+2 = 2024 \Rightarrow a+b+c = -2022 \Rightarrow f(1) = a+b+c+2 = -2022+2 = -2020.$$

$$2) \text{Gọi tuổi của chú và cháu hiện nay lần lượt là } x, y \text{ (tuổi), } (x, y \in \mathbb{N}^*).$$

$$\text{Theo giả thiết ta có phương trình } x+y=91. (1)$$

Vì hiệu số tuổi của chú và cháu tại mọi thời điểm không thay đổi nên ta có phương trình

$$x-y = y - \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 2y \Leftrightarrow 3x-4y=0. (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} x+y=91 \\ 3x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=52 \\ y=39 \end{cases}.$$

Vậy hiện nay chú 52 tuổi, cháu 39 tuổi.

$$3) \text{Gọi số phải tìm là } n = \overline{abcd} \text{ (} 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c, d \leq 9 \text{)}.$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } a+b=15. \text{ Vì } n:2,5,9 \Rightarrow d=0 \Rightarrow n = \overline{abc0}.$$

$$\text{Vì } n:9 \Rightarrow a+b+c:9 \Rightarrow 15+c:9 \Rightarrow c=3, a+b=12.$$

$$\text{Ta có các bộ sau } (a,b,c,d) \in \{(9,6,3,0); (6,9,3,0); (8,7,3,0); (7;8;3;0)\}.$$

Câu III (3.0 điểm).

1) ĐKXD: $x \geq \frac{2}{3}$.

$$x^2 + 2\sqrt{3x-2} + 2 = 5x \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 2 = 2\sqrt{3x-2} \Rightarrow (-x^2 + 5x - 2)^2 = (2\sqrt{3x-2})^2$$

$$\Rightarrow x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 32x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-6)(x-2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=6 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{1; 2; 6\}$.

2) $\begin{cases} x^3 + 2y = y^3 + x & (1) \\ y^2 = 2(1-x^2) & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có $2 = \frac{y^2}{1-x^2}$. Thay vào (1) ta có

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{y^2}{1-x^2} \cdot y &= y^3 + x \Leftrightarrow x^3(1-x^2) + y^3 = (1-x^2)(x+y^3) \\ \Leftrightarrow -x^5 + 2x^3 - x + x^2y^3 &= 0 \Leftrightarrow -x(x^4 - 2x^2 + 1 - xy^3) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^4 - 2x^2 + 1 - xy^3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Nếu $x=0$. Thay vào (1) ta có $2y = y^3 \Rightarrow y^3 - 2y = 0 \Leftrightarrow y(y^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y^2=2 \end{cases}$.

Thay vào (2) ta có $y^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$.

Vậy $(x, y) \in \{(0, \sqrt{2}); (0, -\sqrt{2})\}$.

+ Nếu $x^4 - 2x^2 + 1 - xy^3 = 0 \Leftrightarrow (1-x^2)^2 = xy^3$. Từ (2) ta có

$$1-x^2 = \frac{y^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 = xy^3 \Leftrightarrow \frac{y^4}{4} = xy^3 \Leftrightarrow y^4 - 4xy^3 = 0 \Leftrightarrow y^3(y-4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=4x \end{cases}$$

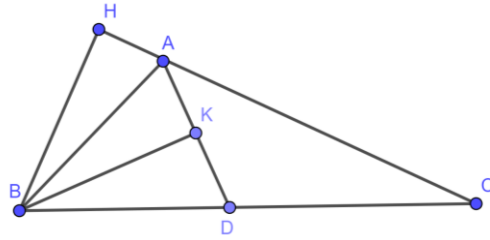
Nếu $y=0$, kết hợp (1) và (2) ta có $\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$. Vậy $(x, y) \in \{(1, 0); (-1, 0)\}$.

Nếu $y=4x$, kết hợp (1) và (2) ta có $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{4}{3} \\ x=-\frac{1}{3} \Rightarrow y=-\frac{4}{3} \end{cases}$. Vậy $(x, y) \in \left\{\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) \in \left\{(0, \sqrt{2}); (0, -\sqrt{2}); (1, 0); (-1, 0); \left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right); \left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

Câu IV (4.0 điểm).

1) Vẽ hình



Kẻ $BH \perp AC$ ($H \in AC$). Do $\angle BAC = 120^\circ$ thì nên H nằm ngoài $\triangle ABC$.

Trong $\triangle AHB$ vuông tại H ta có $\sin BAH = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \sin BAH = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (cm).

Và $\cos BAH = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cos BAH = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (cm).

Khi đó $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 3\sqrt{3}$ (cm²).

2) Theo định lý Pythagore trong $\triangle BHC$ vuông tại H ta có

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 4\right)^2 = 37 \Rightarrow BC = \sqrt{37} \text{ (cm)}.$$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow \frac{DB}{\sqrt{37}} = \frac{3}{7} \Rightarrow DB = \frac{3\sqrt{37}}{7} \text{ (cm)}.$$

Kẻ $BK \perp AD$ ($K \in AD$). Khi đó $\triangle ABK = \triangle ABH$ (c.h- g.n)

$$\Rightarrow AK = AH = \frac{3}{2} \text{ (cm)}; BK = BH = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (cm)}.$$

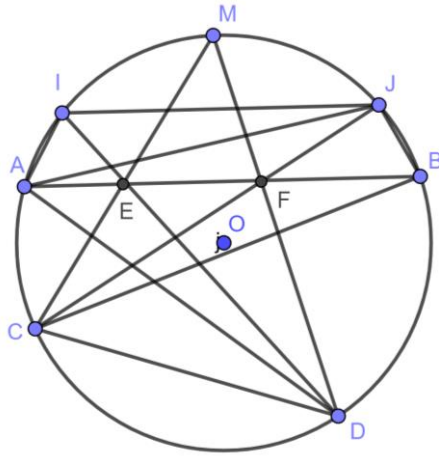
Theo định lý Pythagore trong $\triangle BKD$ vuông tại K ta có

$$KD^2 = BD^2 - BK^2 = \left(\frac{3\sqrt{37}}{7}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{196} \Rightarrow KD = \frac{3}{14} \text{ (cm)}.$$

$$\Rightarrow AD = AK + KD = \frac{3}{2} + \frac{3}{14} = \frac{12}{7} \text{ (cm)}.$$

Câu V (4.0 điểm).

Vẽ hình



Ta có

$$MA = MB \Rightarrow AEC = \frac{1}{2}(sd AC + sd MB); CDM = \frac{1}{2}(sd AC + sd MA) \Rightarrow AEC = CDM \Rightarrow AEC = CDF$$

$\Rightarrow CEFD$ nội tiếp $\Rightarrow CDE = CFE$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC).

Mặt khác $CDI = IJC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IC) $\Rightarrow AFC = IJC$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị suy ra $IJ \parallel AB \Rightarrow IJA = JAB$ (hai góc so le trong) $AI = BJ \Rightarrow AI = BJ$.