

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$, ($x > 0$; $x \neq 1$).

b) Tính giá trị biểu thức $B = \frac{2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 2x + 3}{3x^3 - 10x^2 - 2x + 2}$, với x thỏa mãn $\frac{x+1}{x^2+3x+8} = \frac{1}{7}$.

Câu 2 (4,0 điểm).

Cho phương trình: $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - m - 3 = 0$ (1), (với x là ẩn số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m .

b) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 3x_2$.

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{4}{2x+y+1} + \frac{3}{3x+y+2} = 4 \\ \frac{5x+2y+3}{(2x+y+1)(3x+y+2)} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $(\sqrt{9-2x}+3)(\sqrt{2x+9}-3) = 4x$.

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định ((O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B thuộc đường tròn (O)). PO giao AB tại I . Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC , E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O).

Chứng minh rằng:

a) $PF \cdot PC = PI \cdot PO$.

b) E là trung điểm của đoạn thẳng AH .

c) Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d .

Câu 5 (2,0 điểm).

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $2x^2y + 3xy + y = x^2 + 2xy^2 + 3x + 1$.

b) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện: $x > 0$, $5x^2 = yz$, $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng: $x \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$.