

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO BẮC NINH ĐỀ CHÍNH THỨC	ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2024- 2025 Môn thi: Toán (Dành cho thí sinh chuyên Toán) Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
--	---

Câu 1. (2,0 điểm)

- Tính giá trị của biểu thức $\sqrt{15x^2 - 2\sqrt{15}x + 30}$ khi $x = \sqrt{15}$.
- Cho hai đường thẳng $d: y = 2x - 1$ và $d': y = x + m$ (m là tham số) cắt nhau tại điểm A . Tìm m để đoạn thẳng OA có độ dài bằng 1 (O là gốc tọa độ).

Câu 2. (2,0 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$.

Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$.

Câu 3. (3,0 điểm)

- Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O) , đường cao AH ($H \in BC$). Gọi K, L lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB và AC . Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P nằm trên cung nhỏ AB).
 - Chứng minh $\widehat{AKL} = \widehat{ACB}$ và $AP = AQ$.
 - Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm T ($T \neq A$). Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ H đến KZ . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại M ($M \neq A$). Chứng minh $\widehat{HMT} = 90^\circ$.
- Cho đoạn thẳng BC cố định và một điểm A thay đổi sao cho tam giác ABC vuông tại A . Hai đường phân giác trong của tam giác ABC là BD và CE cắt nhau tại điểm O . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{BD^2}{BO^2} + \frac{CE^2}{CO^2}$.

Câu 4. (1,5 điểm)

- Bạn An tham gia phiên chợ hè trong đó có sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 2000 đồng. Bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y thẻ loại giá 2000 đồng. Tìm số cách mua có đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2024000 đồng.
- Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p(p - 1) = q(q^2 - 1)$.

Câu 5. (1,5 điểm)

- Cho a, b, c là các số thực không âm và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = \frac{2a + c}{1 + bc} + \frac{2b + c}{1 + ca}.$$
- Cho một mảnh giấy hình vuông. Mảnh giấy này được chia thành hai mảnh giấy bằng một đường cắt thẳng. Lấy một trong hai mảnh có được, ta lại làm như trên nhiều lần. Hỏi số lần cắt ít nhất phải là

bao nhiêu để có thể nhận được 100 đa giác 20 cạnh.

-----HẾT-----

Giải đề thi Toán chuyên THPT Chuyên Bắc Ninh 2024

Nguyễn Văn Hoàng - Nguyễn Thế Khải - Trần Minh Tuấn - Trần Cường

1 Câu 1

- 1 Tính giá trị biểu thức $\sqrt{15x^2 - 2\sqrt{15}x + 30}$ khi $x = \sqrt{15}$.
- 2 Cho hai đường thẳng $d: y = 2x - 1$ và $d': y = x + m$ (m là tham số) cắt nhau tại điểm A . Tìm m để đoạn thẳng OA có độ dài bằng 1 (O là gốc tọa độ).

Lời giải.

- 1 Ta có: $\sqrt{15x^2 - 2\sqrt{15}x + 30} = \sqrt{(x\sqrt{15} - 1)^2 + 29} = \sqrt{(15 - 1)^2 + 29} = 15$.
- 2 Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= x + m \\ \Leftrightarrow x &= m + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó ta có: } A(m + 1, 2m + 1) \Rightarrow OA = \sqrt{(m + 1)^2 + (2m + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1}{5} \\ m = -1 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy $m = \frac{-1}{5}$ hoặc $m = -1$.

2 Câu 2

- 1 Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$
- 2 Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$

Lời giải.

$$1 \quad \begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0(1) \\ x^2 + 6y^2 = 10(2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\text{Từ (1) và (2) ta được: } x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x - 2y) + xy(x - 2y) + 3y^2(x - 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2y \text{ hoặc } x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

TH1: Nếu $x^2 + xy + 3y^2 = 0$ thì $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}y^2 = 0$ mà $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2, \frac{11}{4}y^2 \geq 0$ Nên $y = 0, x + \frac{y}{2} = 0$ hay $x = y = 0$ (thử lại vào (2) thì vô lý)

TH2: Nếu $x = 2y$. Thế vào (2) ta được:

$$\begin{aligned} 10y^2 &= 10 \\ \Leftrightarrow y &= \pm 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x; y) \in \{(2; 1), (-2; -1)\}$ (thử lại thoả mãn)

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1), (-2; -1)\}$

$$2. \text{ ĐKXD: } \begin{cases} 5x^2 + 4x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 18 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \cdot X \geq 6$$

Phương trình tương đương:

$$\sqrt{5x^2 + 4x} - 5\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18}$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 4x - 10x\sqrt{5x + 4} + 25x = x^2 - 3x - 18$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 18 = 10x\sqrt{5x + 4}$$

$$\Rightarrow 16x^4 + 256x^3 + 1168x^2 + 1152x + 324 = 100x^2(5x + 4)$$

$$\Rightarrow 4(x - 9)(4x + 3)(x^2 - 7x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \frac{3}{4} \text{ (loại do } x \geq 6 \text{)} \\ x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{61}}{2} \text{ (loại do } x \geq 6 \text{)} \end{cases}$$

(Thử lại thoả mãn)

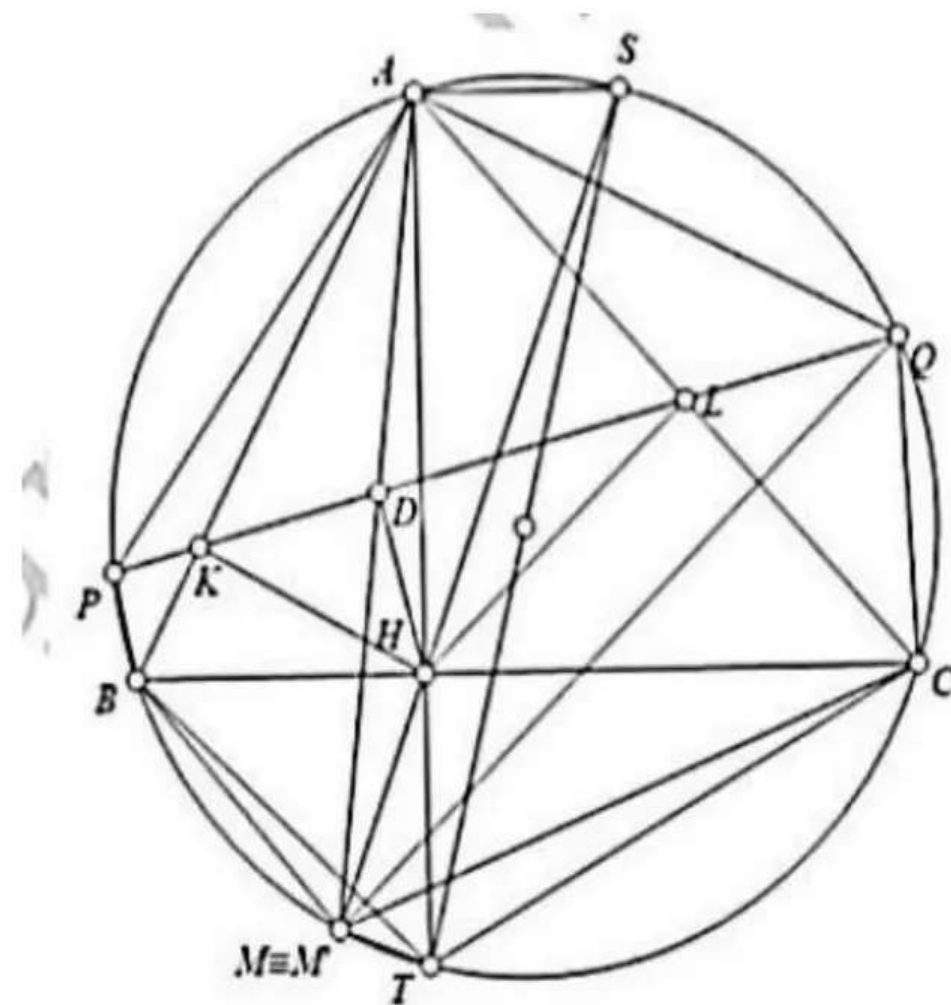
$$\text{Vậy } x \in \left\{9; \frac{7 + \sqrt{61}}{2}\right\}.$$

3 Câu 3

- Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O) , đường cao $AH (H \in BC)$. Gọi K, L lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB và AC . Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P nằm trên cung nhỏ AB).
 - Chứng minh $\widehat{AKL} = \widehat{ACB}$ và $AP = AQ$.
 - Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại điểm $T (T \neq A)$. Gọi D là chân đường vuông góc kẻ từ H đến KL . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại $M (M \neq A)$. Chứng minh $\widehat{HMT} = 90^\circ$.
- Cho đoạn thẳng BC cố định và một điểm A thay đổi sao cho tam giác ABC vuông tại A . Hai đường phân giác trong của tam giác ABC là BD và CE cắt nhau tại điểm O . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{BD^2}{BO^2} + \frac{CE^2}{CO^2}$$

Lời giải.



1.a) Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông thì: $AH^2 = AK \cdot AB = AL \cdot AC$ Nên $\frac{AK}{AC} = \frac{AL}{AB}$ đồng thời có $\widehat{BAC}$ chung

Suy ra $\triangle AKL \sim \triangle ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{ACB}$

Ta có: $180^\circ - \widehat{AKL} = 180^\circ - \widehat{ACB}$ nên $\widehat{AKP} = \widehat{APB}$

Có $\widehat{PAB}$ chung, suy ra $\triangle AKP \sim \triangle APB$ (g.g)

Nên $\frac{AK}{AP} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AP^2 = AB \cdot AK = AH^2$

Suy ra $AP = AH$, tương tự có $AQ = AH$.

Nên $AP = AQ$

1.b) Kẻ $AS \parallel BC$ khi đó $\widehat{SAT} = 90^\circ$

Ta cần chứng minh M, H, S thẳng hàng thì bài toán được giải quyết.

Ta cho SH cắt (O) tại M' khác S .

Lúc này ta có: $\frac{BH}{HC} = \frac{BH}{HS} \cdot \frac{HS}{HC} = \frac{BM'}{SC} \cdot \frac{BS}{M'C}$

Mà $\frac{SB}{SC} = \frac{AC}{AB}$ nên $\frac{BH}{HC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{M'B}{M'C}$ hay $\frac{M'B}{M'C} = \frac{HB}{HC} \cdot \frac{AB}{AC}$

Ta cần phải chứng minh $\frac{MB}{MC} = \frac{HB}{HC} \cdot \frac{AB}{AC}$ để suy ra M trùng M' .

Đầu tiên ta có: $\widehat{AKD} = \widehat{ACB} = \widehat{AMB}$ nên tứ giác $KDMB$ nội tiếp.

Tương tự ta cũng có tứ giác $MDLC$ nội tiếp.

Suy ra $\frac{KD}{MB} = \frac{AD}{AB}$ (vì $\triangle AKD \sim \triangle AMB$)

Và $\frac{DL}{MC} = \frac{AD}{AC}$ (vì $\triangle ALD \sim \triangle AMC$).

Lúc này $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{KD}{DL}$, tức ta cần chứng minh $\frac{KD}{DL} = \frac{HB}{HC}$

Điều này khá đơn giản khi ta để ý thấy với tứ giác $AKHL$ nội tiếp.

Nên $\triangle HKD \sim \triangle TBH$ (g.g) (do $\widehat{HKD} = \widehat{HAL} = \widehat{TBH}$)

và $\triangle HLD \sim \triangle TCH$ (g.g) (tương tự)

Suy ra $\frac{KD}{HD} = \frac{HB}{TH}$ (1) và $\frac{LD}{DH} = \frac{CH}{HT}$ (2)

Chia (1) cho (2) ta được điều cần chứng minh

Khi đó ta có: $M \equiv M'$ và bài toán đã được giải quyết

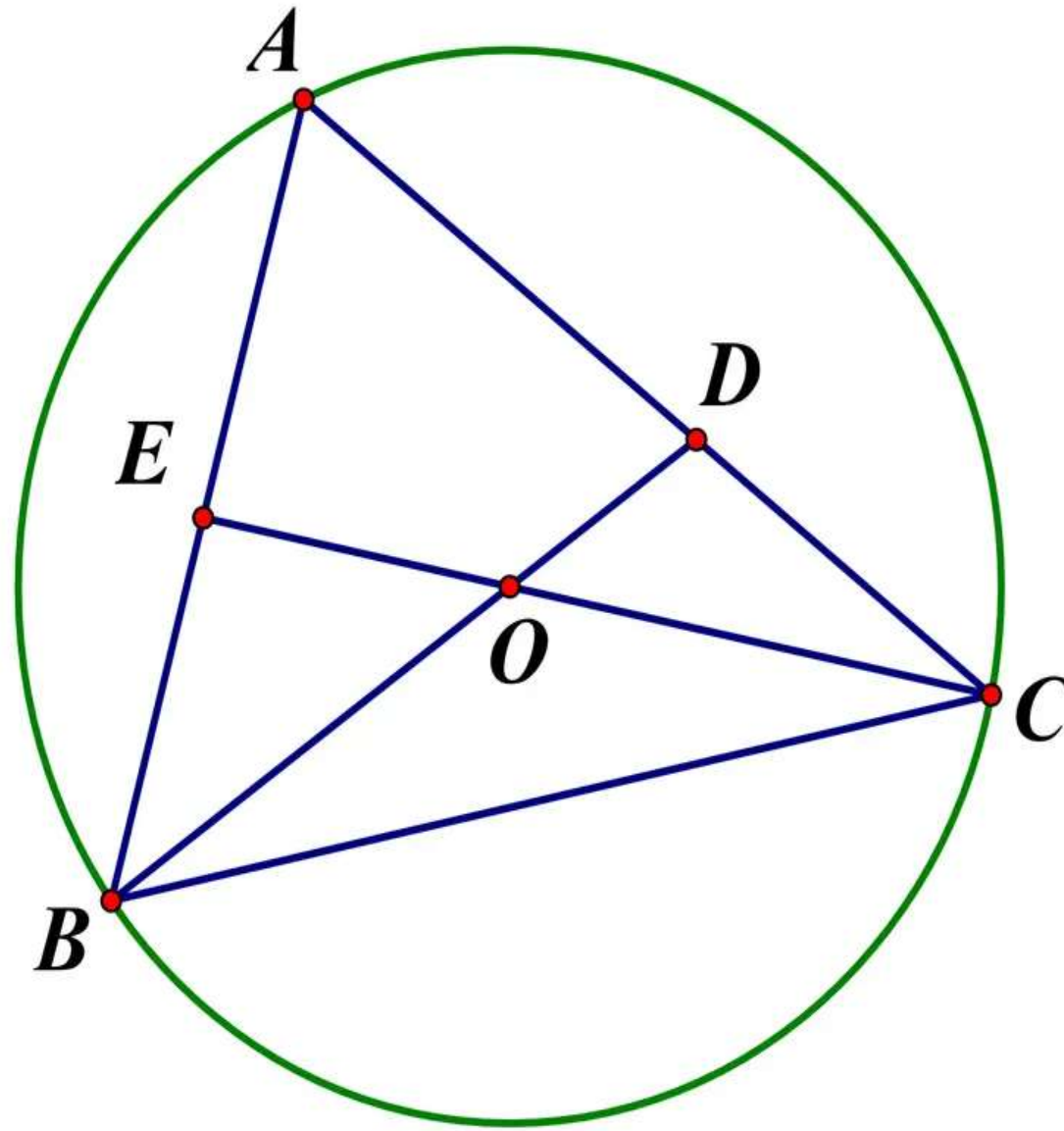
2. Từ giả thiết ta có O là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Khi này, ta dễ dàng có những biến đổi sau, theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{BD}{BO} = \frac{AD + AB}{AB} = 1 + \frac{AD}{AB} = 1 + \frac{AD + DC}{AB + BC} = \frac{AB + BC + CA}{AB + BC}$$

Tương tự ta có $\frac{CE}{CO} = \frac{AB + BC + CA}{AC + BC}$

$$\text{Khi đó } S = \left(\frac{BD}{BO}\right)^2 + \left(\frac{CE}{CO}\right)^2$$



$$S \geq 2 \cdot \frac{BD}{BO} \cdot \frac{CE}{CO} \geq 2 \cdot \frac{(AB + BC + CA)^2}{(AB + BC)(AC + BC)} \geq 2 \cdot \frac{(AB + BC + CA)^2}{AB \cdot AC + BC(AB + AC) + BC^2}$$

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$

$$S \geq 2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca}{a^2 + ab + bc + ca}$$

$$= 2 \left(2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + ab + bc + ca} \right)$$

$$\text{Mà } b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

$$\text{Nên } S \geq 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Dấu} = \text{xảy ra khi } AB = AC = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot BC$$

Tức A là điểm chính giữa cung BC .

4 Câu 4

1. Bạn An tham gia phiên chợ hè trong đó có sử dụng hai loại thẻ: loại thẻ giá 3000 đồng và loại thẻ giá 2000 đồng. Bạn An muốn dùng hết số tiền tiết kiệm của mình để mua x thẻ loại giá 3000 đồng và y

thẻ loại giá 2000 đồng. Tìm số cách mua đủ cả hai loại thẻ nếu tiền tiết kiệm của bạn An là 2024000 đồng.

2 Tìm tất cả số nguyên tố p, q thỏa mãn $p(p - 1) = q(q^2 - 1)$

Lời giải.

1. Trước tiên, từ giả thiết ta viết phương trình của bài toán:

$$\begin{aligned}3000x + 2000y &= 2024000 \\ \Leftrightarrow 3x + 2y &= 2024\end{aligned}$$

Tức số cách chính bằng số nghiệm $(x; y)$ nguyên dương của phương trình $3x + 2y = 2024$ (do yêu cầu mua đủ cả 2 loại thẻ, nên $x, y > 0$). Do 2024 và $2y$ đều chẵn, nên $3x$ chẵn, tức x chẵn.

Đặt $x = 2z$ với z nguyên dương, ta có phương trình mới: $3z + y = 1012$ Đến đây, ta thấy $y \geq 1 \Rightarrow 3z \leq 1011 \Rightarrow z \leq 337$

Mà z nguyên dương, nên có đúng 337 giá trị z thỏa mãn (tương ứng với giá trị y nguyên dương thỏa mãn $y = 1012 - 3z$).

Vậy kết luận An có đúng 337 cách mua sao cho đủ cả hai loại thẻ.

2. Từ giả thiết, do $q + 1 > 1 \Rightarrow p(p - 1) > q(q - 1) \Rightarrow p > q$

Lại có: $q(q - 1)(q + 1)$ ip, mà p là số nguyên tố, nên có ít nhất 1 trong 3 số $q, q - 1, q + 1$ chia hết cho p .

Mặt khác, do $p > q \geq 2 \Rightarrow 0 < q - 1 < q < q + 1 \leq p$

Suy ra $q + 1 = p \Rightarrow q = 2; p = 3$ (do p, q đều là số nguyên tố).

Thử lại thỏa mãn, ta kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $(p; q) = (3; 2)$

5 Câu 5

1 Cho a, b, c là các số thực không âm và thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 8$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a + c}{1 + bc} + \frac{2b + c}{1 + ca}$$

2 Cho một mảnh giấy hình vuông. Mảnh giấy này được chia thành hai mảnh giấy bằng một đường cắt thẳng. Lấy một trong hai mảnh có được, ta lại làm như trên nhiều lần. Hỏi số lần cắt ít nhất phải là bao nhiêu để có thể nhận được 100 đa giác 20 cạnh.

Lời giải.

1 Ta đi chứng minh

$$1 + bc \geq \frac{a + b + c}{4}$$

Thật vậy, ta có:

$$1 + bc \geq \frac{a + b + c}{4}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 16(1+bc)^2 \geq (a+b+c)^2 \\
&\Leftrightarrow 8+16b^2c^2+30bc \geq 2a(b+c) \\
&\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+16b^2c^2+30bc \geq 2a(b+c) \\
&\Leftrightarrow a^2+(b+c)^2+16b^2c^2+28bc \geq 2a(b+c)
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng theo $AM - GM$ và do a, b, c là các số thực không âm. Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} c = 0 \\ a = b + c \end{cases}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$1 + ca \geq \frac{a + b + c}{4}$$

Khi đó

$$P \leq \frac{2a + c}{\frac{a + b + c}{4}} + \frac{2b + c}{\frac{a + b + c}{4}} = 8$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}$

2. Trước tiên ta đưa ra một số nhận xét sau (trong phòng thi bạn đơn giản chỉ cần lấy thước cắt giấy nháp là sẽ thấy nha):

Nhận xét 1: Mỗi nhát cắt, số mảnh giấy tăng đúng 1. Mỗi mảnh giấy được cắt ra đều là một đa giác lồi.

Điều này hiển nhiên, cần thận có thể chứng minh bằng quy nạp.

Nhận xét 2: Mỗi nhát cắt, tổng số cạnh của tất cả các mảnh giấy tăng lên tối đa 4.

Điều này suy ra từ nhận xét 1, ta thấy một đường cắt chỉ đi qua tối đa 2 cạnh của mảnh giấy đa giác lồi, thêm cạnh sinh ra từ đường cắt được tính 2 lần, thì chỉ có tối đa 4 cạnh tăng thêm.

Từ 2 điều trên, ta biết rằng qua k lần cắt, thì sẽ có đúng $k + 1$ mảnh giấy và tối đa $4 + 4k$ cạnh trong tất cả các mảnh giấy.

Vậy để có 100 đa giác 20 cạnh, ta cần số lần cắt $k \geq 99$, và đồng thời

sẽ có ít nhất $k + 1 - 100 = k - 99$ đa giác khác ngoài 100 đa giác 20 cạnh đang xét. Ta có bất đẳng thức:

$$4 + 4k \geq 100 \cdot 20 + 3(k - 99) \Rightarrow k \geq 1699$$

Đến đây, ta chỉ ra cách cắt, không quá phức tạp như sau. Với đa giác n cạnh, ta cắt đường đi qua 2 cạnh kề nhau, sẽ sinh ra được đa giác $n + 1$ cạnh và 1 tam giác. Theo cách này, sau 16 bước cắt đầu, ta ra được 1 đa giác 20 cạnh và 16 tam giác. Mỗi lần sau, ta dùng 17 bước cắt sẽ tạo ra thêm được 1 đa giác 20 cạnh. Tức cuối cùng sẽ cần: $16 + 17 \cdot 99 = 1699$, thỏa mãn dấu bằng. Vậy cần ít nhất 1699 bước cắt để thỏa mãn bài toán.