

Bài 1. (1,0 điểm) Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2020$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) : (a+b+c)$

Bài 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình : $\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 \end{cases}$$

Bài 3. (1,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < BC < CA$) nội tiếp đường tròn (O) . Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (O) tại A_1 . Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại A_1 . Từ B kẻ đường thẳng song song với AC cắt (O) tại B_1 . Từ C kẻ đường thẳng song song với AB cắt (O) tại C_1 . Chứng minh rằng các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Bài 4. (2,0 điểm)

a) Cho 2 số thực a, b . Chứng minh rằng: $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab + \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2 + 2}$

b) Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b \leq 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = b - a + \frac{20}{a} + \frac{7}{b}$

Bài 5. (2,0 điểm)

Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F . Kẻ đường kính EJ của đường tròn (I) . Gọi d là đường thẳng qua A song song với BC . Đường thẳng JD cắt d, BC lần lượt tại L, H .

a) Chứng minh : E, F, L thẳng hàng

b) JA, JF cắt BC lần lượt tại M, K . Chứng minh $MH = MK$

Bài 6. (1,0 điểm) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình :

$$3^x - y^3 = 1$$

ĐÁP ÁN

Bài 1. Ta có $\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)(a+b+c) = 2020(a+b+c)$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + a+b + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} + c = 2020(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 2019(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right) : (a+b+c) = 2019$$

Vậy $P = 2019$

Bài 2. a) $\sqrt{2x^2 + x + 9} + \sqrt{2x^2 - x + 1} = x + 4 \quad (1)$

Đặt $\sqrt{2x^2 + x + 9} = a (a > 0)$ (do $2x^2 + x + 9 > 0$) và

$\sqrt{2x^2 - x + 1} = b (b > 0)$ (do $2x^2 - x + 1 > 0$). Khi đó ta có: $a^2 - b^2 = 2x + 8$

Thay vào phương trình ta có: $a + b = \frac{a^2 - b^2}{2} \Leftrightarrow 2(a+b) = (a-b)(a+b) \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases}$

*) Th1: $a + b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} (ktm)$

*) Th2: $a - b = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + x + 9} - \sqrt{2x^2 - x + 1} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + x + 9} = 2 + \sqrt{2x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 2x^2 + x + 9 = 4 + 2x^2 - x + 1 + 4\sqrt{2x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 2\sqrt{2x^2 - x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 4x + 4 = 8x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 0 (tm) \\ x = \frac{8}{7} (tm) \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{0; \frac{8}{7}\right\}$

$$b) \begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 & (1) \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có: $y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1$ thay vào (1) ta có:

$$x^3 + 8x^2 - x + 1 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2xy + 5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2y + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$*)th1: x = 0 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$$

$$*)th2: x^2 - 2y + 5 = 0 \Rightarrow 2y = x^2 + 5$$

$$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow 4y^2 = 4x^3 + 32x^2 - 4x + 4$$

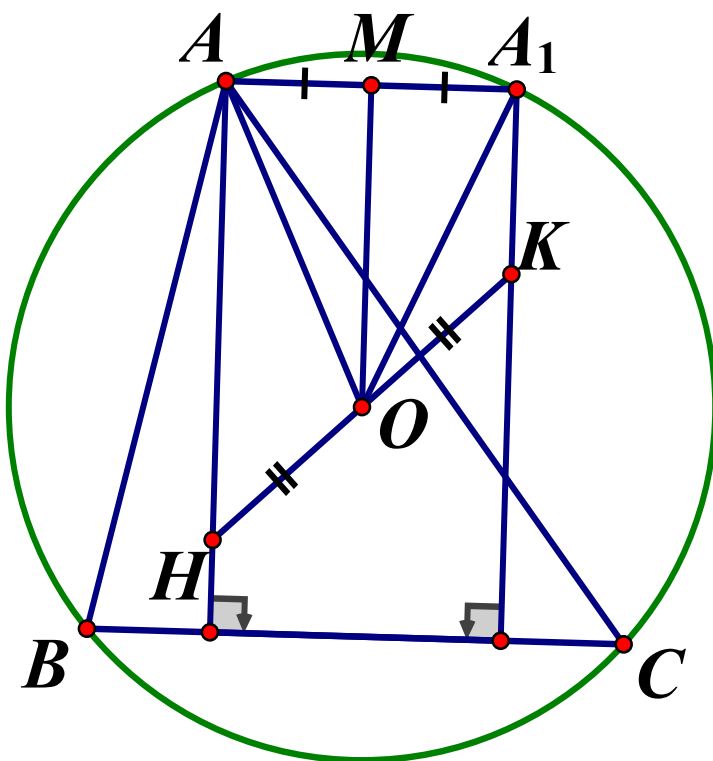
$$\Leftrightarrow (x^2 + 5)^2 = 4x^3 + 32x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 4x + 21$$

$$\Leftrightarrow (x - 7)(x + 3)(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} x = 7 \Rightarrow y = 27 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -3 \Rightarrow y = 7 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) \in \{(-3; 7); (-1; 3); (0; -1); (0; 1); (1; 3); (7; 27)\}$

Bài 3.



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và OH cắt đường thẳng qua A_1 , vuông góc với BC ở điểm K . Gọi M là trung điểm AA_1 thì $OM \perp AA_1 \Rightarrow OM \perp BC$

Mặt khác, tứ giác $AHKA_1$ là hình thang vì $AH \parallel A_1K$ nên ta có OM là đường trung bình, kéo theo O là trung điểm HK hay nói cách khác, đường thẳng qua A_1 , vuông góc với BC sẽ đi qua điểm đối xứng với trực tâm H của $\triangle ABC$ qua O . Rõ ràng điểm này bình đẳng với B, C nên hai đường qua B_1, C_1 lần lượt vuông góc với CA, AB cũng đi qua K . Vì thế nên ta có các đường thẳng của đề bài đồng quy ở K

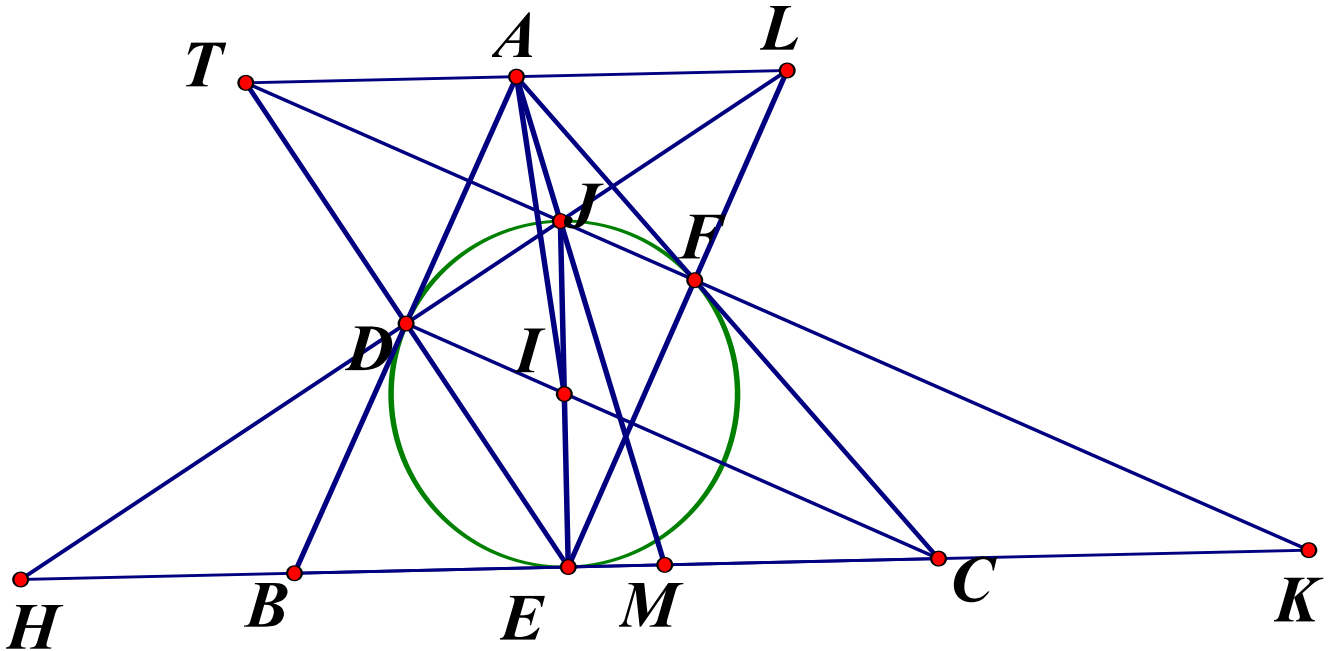
Bài 4.

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } \frac{a^2 + b^2}{2} &\geq ab + \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2 + 2} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} \geq \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2 + 2} \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a^2 + b^2 + 2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + 2} \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

b) Ta có: $a, b > 0$ và $a \leq 3 - b$

$$\begin{aligned}
Q &= b - a + \frac{20}{a} + \frac{7}{b} \geq b - (3 - b) + \frac{20}{3 - b} + \frac{7}{b} = (2b - 3) + \frac{20}{3 - b} + \frac{7}{b} \\
&= \left[5(3 - b) + \frac{20}{3 - b} \right] + \left(7b + \frac{7}{b} \right) - 18 \\
&\geq 2\sqrt{100} + 2\sqrt{49} - 18 = 16 \\
\text{Vậy } \min Q &= 16 \Leftrightarrow a = 2, b = 1
\end{aligned}$$

Bài 5.



- a) Ta có JE là đường kính của (I) nên $\angle JDE = 90^\circ$ và $\triangle HDE$ vuông ở D . Chú ý rằng $BD = BE$, do cùng là tiếp tuyến kẻ từ B đến (I) nên $BD = BH$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền). Do đó $\triangle BHD$ cân ở B
 Vì $AL \parallel BH \Rightarrow \triangle ADL \sim \triangle BDH$, kéo theo $\triangle ADL$ cân ở A
 $\Rightarrow AL = AD = AF$
 Vì $AL \parallel CE \Rightarrow \angle LAF = \angle FCE$, mà $\triangle ALF, \triangle CEF$ đều cân có các góc ở đỉnh bằng nhau nên chúng đồng dạng
 Suy ra $\angle AFL = \angle CFE \Rightarrow L, F, E$ thẳng hàng
- b) Kéo dài JF cắt d ở T thì tương tự câu a , ta có: T, D, E thẳng hàng và $AT = AD = AF = AL$

Theo định lý Ta – let với $d // BC$ thì $\frac{AL}{MH} = \frac{AJ}{JM} = \frac{AT}{MK}$ mà $AT = AL$ nên
 $MH = MK$

Bài 6. Ta có:

$$3^x - y^3 \Leftrightarrow y^3 + 1 = 3^x \Leftrightarrow (y+1)(y^2 - y + 1) = 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = 3^m (1) \\ y^2 - y + 1 = 3^n (2) \end{cases}$$

Do $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}$

$$*)Th1: m = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2(tm)$$

$$*)Th2: m \geq 2 \Rightarrow y = 3^m - 1$$

Thế vào (2) ta có:

$$\begin{aligned} (3^m - 1)^2 - (3^m + 1) + 1 &= 3^2 \\ \Leftrightarrow 3^n &= 3^{2m} - 3^m + 3 = 3^{m+1}(3^{m-1} - 1) + 3 > 3^{m+1} \Rightarrow n < m + 1 \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có: } 3 = 3^n - 3^{2m} + 3^{m+1} = 3^{m+1}(3^{n-m-1} - 3^{m-1} + 1); 3^{m+1} \Rightarrow m = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2, y = 2$