

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH THÁI BÌNH**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN TOÁN CHUYÊN
Thời gian : 150 phút**

ĐỀ BÀI

Câu 1:

a) Cho các số thực x, y khác 0, thỏa mãn: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3$ và $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 10$.

Chứng minh $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

b) Cho đa thức bậc 3 $P(x)$ thỏa mãn khi chia $P(x)$ cho $x-1, x-2, x-3$ đều được số dư là 6 và $P(-1) = -18$. Tìm đa thức $P(x)$

c) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 8$;

$a + b + c = 26; abc = 144$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{1}{\sqrt{bc} - \sqrt{a} + 9} + \frac{1}{\sqrt{ca} - \sqrt{b} + 9} + \frac{1}{\sqrt{ab} - \sqrt{c} + 9}$

Câu 2:

a) Giải phương trình: $3x^2 + x - 6 = 4x(\sqrt{5x-6} - 1)$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - xy^2 - 6y = 0 \\ (x+y)(x+2y) = 3(xy+2) \end{cases}$

Câu 3: Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = c, AC = b$. Vẽ đường tròn tâm O_1 đường kính AB và đường tròn tâm O_2 đường kính AC. Gọi H là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O_1) và (O_2) . Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A cắt các đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại các điểm D, E không trùng với A sao cho A nằm giữa D, E.

a) Chứng minh rằng đường trung trực của đoạn thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng (d) thay đổi.

b) Xác định vị trí của đường thẳng (d) để diện tích tứ giác BDEC đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó theo b, c .

c) Kẻ đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn DE và vuông góc với BC tại K. Chứng minh rằng $KB^2 = BD^2 + KH^2$

Câu 4: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(7-p)(7+p)$ chia hết cho 24

Câu 5: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} - x^2 - 28y^2 - 28z^2$$

ĐÁP ÁN**Câu 1:** a) Từ giả thiết ta có

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3xy \\ x^3 + y^3 = 10xy \end{cases} \Rightarrow (x+y)(x^2 + y^2) = 3xy(x+y) \Rightarrow x^3 + y^3 + xy(x+y) = 3xy(x+y)$$

$$\Leftrightarrow 10xy = 2xy(x+y) \Leftrightarrow x+y = 5 (x, y \neq 0)$$

$$\text{Ta có } (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5xy \Rightarrow xy = 5 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 (\text{đpcm})$$

b) Theo định lý Bezout: $P(x) - 6 = S(x)(x-1)(x-2)(x-3)$

$$\text{Do } P \text{ bậc } 3 \Rightarrow S(x) = a. \text{ và } P(-1) = a(-2)(-3)(-4) + 6 = -18 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Suy ra } P(x) = (x-1)(x-2)(x-3) + 6 = x^3 - 6x^2 + 11x$$

Thử lại ta thấy đúng.

$$\text{Vậy } P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$$

c) Đặt $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) = (x, y, z)$ điều kiện: $x, y, z \geq 0$

$$\Rightarrow x+y+z=8; x^2+y^2+z^2=26; x^2y^2z^2=144$$

$$\Rightarrow x+y+z=8; xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = 19; xyz = 12 (\text{Do } x, y, z \geq 0)$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{yz-x+9} + \frac{1}{xz-y+9} + \frac{1}{xy-z+9}$$

$$\text{Ta có: } yz-x+9 = yz-x+x+y+z+1 = (z+1)(y+1)$$

$$\text{Tương tự: } xz-y+9 = (x+1)(z+1); xy-z+9 = (x+1)(y+1)$$

$$\Rightarrow \frac{x+1+y+1+z+1}{(x+1)(y+1)(z+1)} = \frac{x+y+z+3}{xyz+x+y+z+xy+yz+xz+1} = \frac{11}{12+19+8+1} = \frac{11}{40}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{11}{40}$$

Câu 2:a) Điều kiện: $x \geq \frac{6}{5}$

$$\text{Từ giả thiết ta có: } -x^2 + 5x - 6 = 4x(\sqrt{5x-6} - x) \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 4x \cdot \frac{-x^2 + 5x - 6}{\sqrt{5x-6} + x}$$

$$\text{Vì } x \geq \frac{6}{5} \text{ nên phương trình tương đương: } \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \left(1 - \frac{-x^2 + 5x - 6}{x + \sqrt{5x-6}}\right) = 0$$

$$\text{Do đó } x = 2 \text{ hoặc } x = 3 (\text{thỏa mãn điều kiện}) \text{ hoặc: } 3x = \sqrt{5x-6} (*)$$

$$\text{Giải phương trình (*): } 9x^2 = 5x - 6 \Leftrightarrow x \left(x - \frac{5}{9}\right) + \frac{2}{3} = 0 \text{ (vô nghiệm vì } x \geq \frac{6}{5} > \frac{5}{9} \text{)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$ và $x = 3$

$$\text{b) } \begin{cases} x^3 - xy^2 - 6y = 0 & (1) \\ (x+y)(x+2y) = 3(xy+2) & (2) \end{cases}$$

Xét (2): $(x+y)(x+2y) = 3(xy+2) \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 6$

Từ (1): $x^3 - xy^2 - y(x^2 + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x^3 - xy^2 - yx^2 - 2y^3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + y^2) = 0$

Ta để ý $(x, y) = (0, 0)$ không là nghiệm của hệ

do đó $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$.

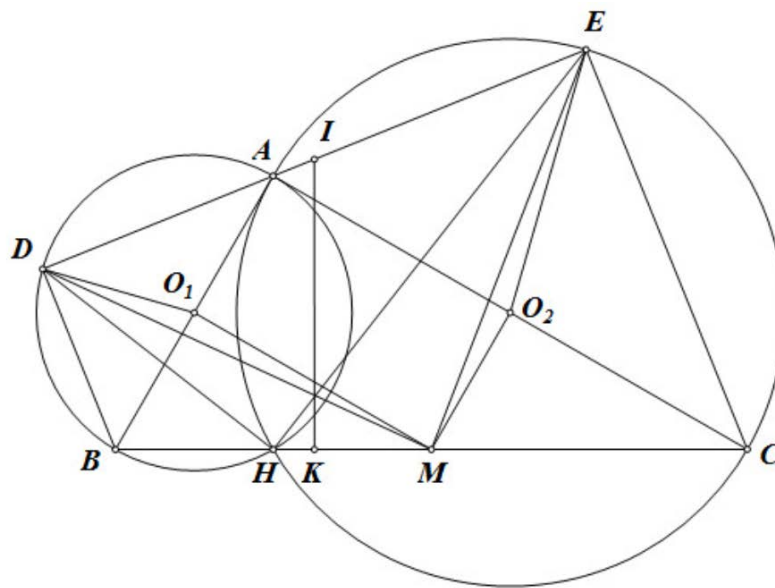
Vậy $x = 2y \Rightarrow 6y^2 = 6 \Rightarrow y = \pm 1$

Nếu $y = 1 \Rightarrow x = 2$ (Thử lại thoả mãn)

Nếu $y = -1 \Rightarrow x = -2$ (Thử lại thoả mãn)

Vậy $(x, y) = (2, 1)$ và $(x, y) = (-2, -1)$ là nghiệm của hệ.

Câu 3:



a) Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow MO_1 = \frac{1}{2}AC; MO_2 = \frac{1}{2}AB$.

Do D thuộc đường tròn đường kính AB nên tam giác ADB vuông tại D.

$\Rightarrow DO_1 = \frac{1}{2}AB = MO_2$. Tương tự thì $EO_2 = MO_1$

Có tam giác ABC vuông tại A (giả thiết). $\widehat{ADB} + \widehat{EAC} = 90^\circ$

Mà tam giác DAB vuông tại D nên $\widehat{ADB} + \widehat{DBA} = 90^\circ$

$\widehat{EAC} = \widehat{ABD} \Rightarrow 2\widehat{EAC} = 2\widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{DO_1A} = \widehat{EO_2C} \Rightarrow \widehat{DO_1B} = \widehat{EO_2A}$

Để thấy $MO_1 \parallel AC, MO_2 \parallel AB \Rightarrow \widehat{MO_1B} = \widehat{MO_2A} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MO_1D} = \widehat{MO_2E}$

Xét $\triangle MO_1D$ và $\triangle EO_2M$ có:

$MO_1 = EO_2$ (cmt)

$\widehat{DO_1M} = \widehat{MO_2E}$ (cmt)

$DO_1 = MO_2$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle MO_1D = \triangle EO_2M$ (c.g.c)

$\Rightarrow MD = ME$ (2 cạnh tương ứng).

$\Rightarrow M$ thuộc trung trực DE. Do đó trung trực DE luôn đi qua M cố định (đpcm).

b) Có $2S_{BDEC} = 2S_{BDA} + 2S_{BAC} + 2S_{AEC} = DB \cdot DA + AB \cdot AC + EA \cdot EC \leq \frac{1}{2}(BD^2 + DA^2) + \frac{1}{2}(EA^2 + EC^2) + bc$

$$= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) + bc = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) + bc = \frac{1}{2}(b+c)^2$$

$$\Rightarrow S_{BDEC} \leq \frac{1}{4}(b+c)^2 \Rightarrow \text{Max} = \frac{1}{4}(b+c)^2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow DA = DB, EA = EC. \Leftrightarrow d$ tạo với AB một góc 45° .

c) Ta có điều phải chứng minh:

$$KB^2 = BD^2 + KH^2 \Leftrightarrow IB^2 - KI^2 = IB^2 - ID^2 + IH^2 - IK^2 \Leftrightarrow IH^2 = ID^2 \Rightarrow IH = ID = IE$$

Do đó tam giác DHE vuông tại H.

$$\text{Thật vậy, có } \widehat{DHB} + \widehat{EHC} = \widehat{DAB} + \widehat{EAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DHE} = 90^\circ$$

Do đó tam giác DHE vuông tại H, tức $KB^2 = BD^2 + KH^2$ (đpcm).

Câu 4:

Do p nguyên tố $p > 3 \Rightarrow p$ không là bội của 3 và 2

$$\Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{3} \text{ và } p^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow p^2 - 1 : 3 \text{ và } 8 \text{ suy ra } \Rightarrow p^2 - 1 : 24$$

$$\text{Vì } (3, 8) = 1 \text{ nên } (7-p)(7+p) = 49 - p^2 = 48 - (p^2 - 1) : 24$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 5: Áp dụng bất đẳng thức AM - GM:

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+zx}} = \frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z}$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+zx}} = \frac{y}{\sqrt{(y+x)(y+z)}} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{y}{y+z} + \frac{x}{y+x}$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+zx}} = \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{z}{z+y} + \frac{x}{z+x}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+1}} \leq 1 + 1 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad (1)$$

$$\text{Và ta có: } x^2 + 28y^2 + 28z^2 = \frac{1}{2}(x-7y)^2 + \frac{1}{2}(x-7z)^2 + \frac{7}{2}(y-z)^2 + 7 \geq 7 \quad (2)$$

Dấu "=" của các bất đẳng thức (1), (2) xảy ra khi $x = 7y = 7z$ và $xy + yz + zx = 1$ khi và chỉ khi

$$y = z = \frac{\sqrt{15}}{15}; x = \frac{7\sqrt{15}}{15}$$

$$\text{Từ (1), (2) có } P < \frac{9}{4} - 7 = -\frac{19}{4} \text{ suy ra } \text{Max}P = 7 \Leftrightarrow y = z = \frac{\sqrt{15}}{15}; x = \frac{7\sqrt{15}}{15}$$

$$\text{Vậy } \text{Max}P = \frac{-19}{4}$$