

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH GIA LAI
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 8/6/2024

Câu 1:

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}-2} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x - 2(m+1) = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 + x_2$

Câu 2:

a) Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2} + 2$. Tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d).

b) Tìm tất cả nghiệm nguyên (x, y) của phương trình

$$x^2 - 4xy + 5y^2 = 2(x - y + 1)$$

Câu 3: Cho đường tròn $(O; R)$ có đường kính AB cố định, I là điểm thuộc đoạn thẳng AO sao cho $AI = 2IO$. Đường thẳng qua I vuông góc với đường thẳng AB cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N. Điểm C di động trên cung nhỏ MB (C không trùng với M và B), E là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM. Đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng AM tại F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng AC và MN. Chứng minh rằng

$$AD.AC - AI.IB = AI^2$$

c) Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = 2KM.KB - MK.MB$$

Câu 4:

a) Giải phương trình $3x + 2\sqrt{(x^2+5)(x-1)} = x^2 + 8$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \\ x^3 = 8x + 1 + 2\sqrt{y-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 5:

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} + \frac{3}{2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

a) Điều kiện: $x > 0$.

Với $x > 0$ ta có

$$\begin{aligned}A &= \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}-2} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\A &= \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2 - (\sqrt{\sqrt{x}+4}-2)}{(\sqrt{\sqrt{x}+4}-2)(\sqrt{\sqrt{x}+4}+2)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\A &= \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}+4}+2 - \sqrt{\sqrt{x}+4}+2}{(\sqrt{\sqrt{x}+4}-2)(\sqrt{\sqrt{x}+4}+2)} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}} \\A &= \frac{4}{\sqrt{x}} : \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{4}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 4\end{aligned}$$

Vậy với $x > 0$ thì $P = 4$.

b) ta có phương trình $x^2 - (m-1)x - 2(m+1) = 0$ (với m là tham số)

Để phương trình đã cho có nghiệm thì

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 8(m+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m+3)^2 \geq 0 (ld)$$

Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = -2(m+1) \end{cases} \quad (1)$$

Ta có:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 + x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) = x_1 + x_2 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$-2(m+1)(m-1) = m-1$$

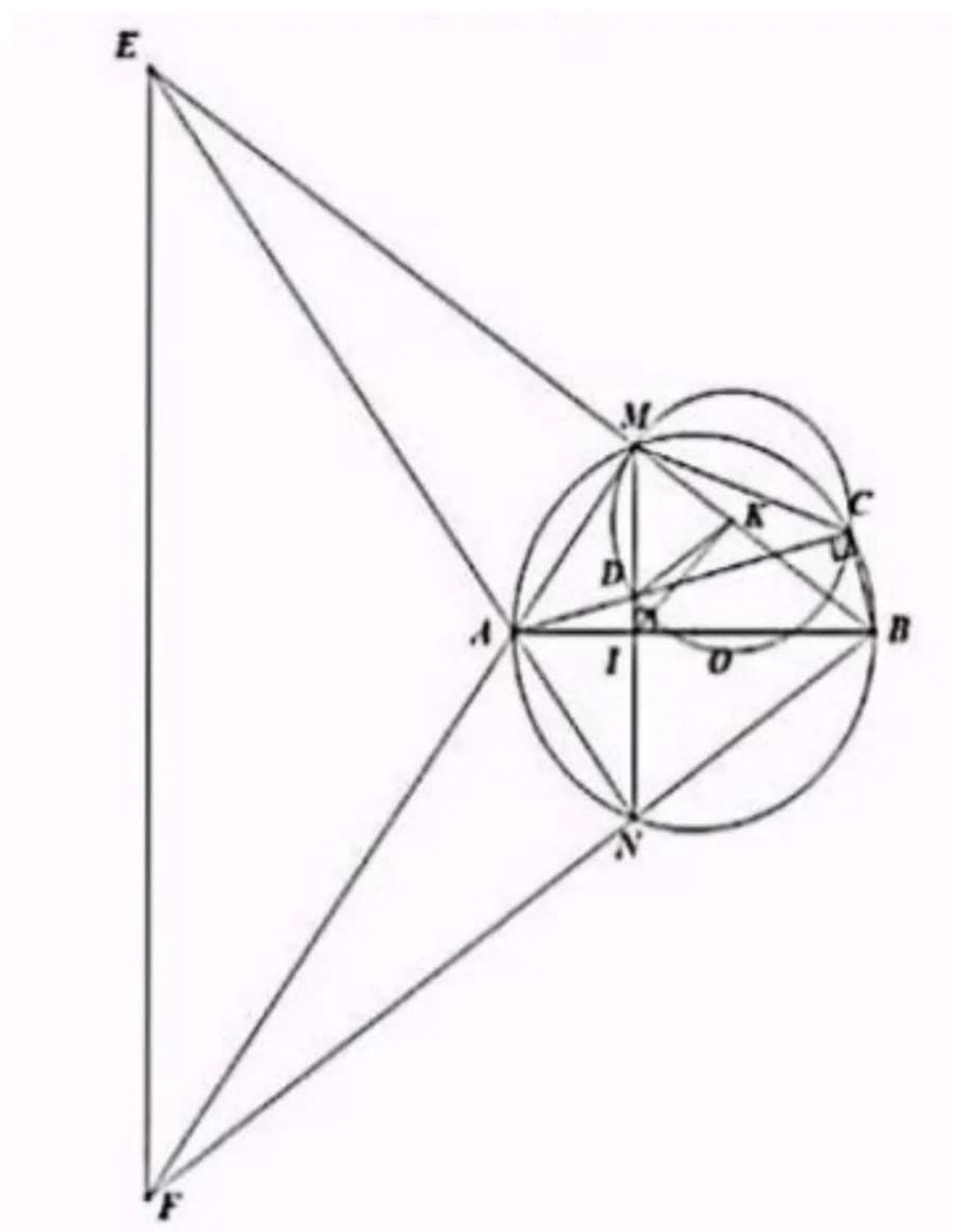
$$\Leftrightarrow -2(m^2 - 1) = m-1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(2m+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 3:



$$\Rightarrow AMN = ANM$$

$$P = \frac{2KM(KB - KM)}{2}$$

$$P \leq \frac{(KB + KM)^2}{8} = \frac{MB^2}{8}$$

Mặt khác, $MB^2 = IA \cdot IB = \frac{8}{3}R^2$

$$\Rightarrow P \leq \frac{R^2}{3}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{R^2}{3}$ xảy ra khi $MK = \frac{1}{4}MB$

Câu 4:

a) Điều kiện: $x \geq 1$

Ta có: $3x + 2\sqrt{(x^2 + 5)(x - 1)} = x^2 + 8$

$$\Leftrightarrow 3(x - 1) + 2\sqrt{(x^2 + 5)(x - 1)} = x^2 + 5$$

Ta đặt $\begin{cases} x - 1 = v \\ x^2 + 5 = u \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành

$$3v + 2\sqrt{uv} = u$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{uv} = u - 3v$$

$$\Leftrightarrow 4uv = (u - 3v)^2 \quad (u \geq v, \forall u, v)$$

$$\Leftrightarrow 4uv = u^2 - 6uv + 9v^2$$

$$\Leftrightarrow u^2 - 10uv + 9v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u - 9v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 9v \end{cases}$$

Với $u = v$ thì $x^2 + 5 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 6 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Với $u = 9v$ thì $x^2 + 5 = 9(x - 1)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases} (tm)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2, x = 7$.

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} -2\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{3} \\ 2 \leq y \leq 12 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x\sqrt{12 - y} + \sqrt{y(12 - x^2)} = 12(1) \\ x^3 = 8x + 1 + 2\sqrt{y - 2}(2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{y(12 - x^2)} = 12 - x\sqrt{12 - y}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y(12-x^2) = (12-x\sqrt{12-y})^2 \\
&\Leftrightarrow 12y - x^2y = 144 - 24y\sqrt{12-y} + 12x^2 - x^2y \\
&\Leftrightarrow 12y - 144 + 24y\sqrt{12-y} - 12x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow -12(12-y) + 24x\sqrt{12-y} - 12x^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{12-y} + (12-y) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - \sqrt{12-y})^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{12-y} \\
&\Leftrightarrow x^2 = 12-y \quad (3)
\end{aligned}$$

Thay (3) vào (2) ta được

$$\begin{aligned}
&x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{10-x^2} \quad (4) \\
&\Leftrightarrow x^3 - 8x - 3 = 2(\sqrt{10-x^2} - 1) \\
&\Leftrightarrow x^2(x-3) + 3x(x-3) + (x-3) = 2 \cdot \frac{9-x^2}{\sqrt{10-x^2} + 1} \\
&\Leftrightarrow (x-3) \left(x^2 + 3x + 1 + \frac{2(3+x)}{\sqrt{10-x^2} + 1} \right) = 0
\end{aligned}$$

TH1: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3(tm)$

TH2: $x^2 + 3x + 1 + \frac{2(3+x)}{\sqrt{10-x^2} + 1} = 0$

Ta đi chứng minh $x > 0$. Phản chứng giả sử $x < 0$

Từ (1) ta có:

$$\sqrt{y(12-x^2)} = 12 - x\sqrt{12-y} > 12$$

Mà $\sqrt{y(12-x^2)} < \sqrt{12(12-0)} = 12$

$\Rightarrow$ Vô lý

Như vậy $x > 0$

Với $x > 0$ thì phương trình (4) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (3, 3)$

Câu 5:

Ta có: $a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2ab + 2b + 2} = \frac{1}{2(ab + b + 1)}$$

Chứng minh tương tự ta được

$$\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2bc + 2c + 2} = \frac{1}{2(bc + c + 1)}$$

$$\frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2ca + 2a + 2} = \frac{1}{2(ca + a + 1)}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} \right) + \frac{3}{2} \quad (*)$$

Bây giờ ta chứng minh $\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} = 1 \quad (**)$

Thật vậy ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ca+a+1} \\ &= \frac{abc}{ab+b+abc} + \frac{abc}{bc+abc^2+abc} + \frac{1}{ca+a+1} \\ &= \frac{ac}{ac+a+1} + \frac{a}{1+ac+a} + \frac{1}{ca+a+1} \\ &= \frac{ca+a+1}{ca+a+1} = 1 \end{aligned}$$

Như vậy (**) đã được chứng minh.

Từ (*) và (**) ta được $P \leq 2$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2 khi $a = b = c = 1$.