

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN BẮC GIANG
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN THI: TOÁN

Câu 1 (5,0 điểm)

- 1) Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y} + \sqrt{x-y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2} - x+y} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$ với $x > y > 0$
- 2) Cho đường thẳng d có phương trình $y = (3m+1)x - 6m - 1$, m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng d là lớn nhất.
- 3) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(3m-1)x + m^2 - m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1 x_2}) + (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1 x_2}) = 2008$

Câu 2 (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = x+7$.
2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + x - 2xy = 2 \\ x^4 + x^2 - 4x^3y = 4 - 4x^2y^2 \end{cases}$$

Câu 3 (4 điểm)

1. tìm các bộ ba số nguyên dương (x,y,z) thỏa mãn đẳng thức dưới đây:

$$x^3 + y^3 + x^2(3y+2z) + y^2(3x+2z) + z^2(x+y) + 4xyz = 2023.$$

2. trên mặt phẳng cho 2×2024 điểm phân biệt, trong đó không có bất kì 3 điểm nào thẳng hàng người ta tô 2024 điểm trong các điểm màu đỏ và tô 2024 điểm còn lại bằng màu xanh. Chứng minh rằng, bao giờ cũng tồn tại một cách nối tất cả các điểm màu đỏ với tất cả các điểm màu xanh bởi 2024 đoạn thẳng (mỗi đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là một cặp điểm đỏ-xanh) sao cho hai đoạn thẳng bất kì trong đó không có điểm chung .

Câu 4 (6 điểm) Cho đường tròn $(O;R)$ và dây cung BC cố định của đường tròn thỏa mãn $BC < 2R$. Một điểm A di chuyển trên $(O;R)$ sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường phân giác của $\widehat{CHE}$ kéo dài về hai phía cắt AB và AC lần lượt tại M, N .

1. Chứng minh tam giác AMN cân tại A .
2. Gọi I, P, Q, J lần lượt là hình chiếu của D trên cạnh AB, BE, CF, AC . Chứng minh rằng bốn điểm I, P, Q, J cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với AO .
3. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ tại điểm thứ hai K . chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm), Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $x + y + z = xyz$. Tìm giá trị

lớn nhất của các biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1

1) Rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y} + \sqrt{x-y}} + \frac{x-y}{\sqrt{x^2-y^2} - x+y} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}}$ với $x > y > 0$

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y} + \sqrt{x-y}} + \frac{\sqrt{(x+y)^2}}{\sqrt{(x+y)(x-y)} - \sqrt{(x-y)^2}} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \\ &= \sqrt{x-y} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}} + \frac{1}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}} \right) \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \\ &= \sqrt{x-y} \cdot \frac{\sqrt{x+y}}{y} \cdot \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2-y^2}} \\ &= \frac{x^2+y^2}{y} \end{aligned}$$

2. Chỉ ra đường thẳng d luôn đi qua điểm $M(2;1)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d

Suy ra $OH \leq OM \forall m$

Chỉ ra đường thẳng OM có phương trình là $y = \frac{1}{2}x$.

Do $OM \perp d$ nên $\frac{1}{2}(3m+1) = -1 \Rightarrow 3m+1 = -2 \Rightarrow m = -1$.

3. Phương trình $x^2 - 2(3m-1)x + m^2 - m - 4 = 0$ (1) có hai điểm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow (3m-1)^2 - (m^2 - m - 4) > 0 \Rightarrow 8m^2 - 5m + 5 > 0 \Rightarrow 8\left(m - \frac{5}{16}\right)^2 + \frac{132}{32} > 0; \forall m \in R$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{Theo Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(3m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - m - 4 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } A = x_1 + x_2 + \sqrt{x_1 x_2}; B = x_1 + x_2 - \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\text{Ta có } A \cdot B = (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} > 0, \forall x_1 x_2$$

$$\text{Suy ra } A \text{ và } B \text{ luôn cùng dấu} \Rightarrow |A| + |B| = |A + B|$$

$$\text{Do đó } |x_1 + x_2 + \sqrt{x_1 x_2}| + |x_1 + x_2 - \sqrt{x_1 x_2}| = 2008 \Rightarrow |x_1 + x_2 + \sqrt{x_1 x_2} + x_1 + x_2 - \sqrt{x_1 x_2}| = 2008$$

$$\Rightarrow |x_1 + x_2| = 1004 \Rightarrow 2|3m - 1| = 1004 \Rightarrow |3m - 1| = 502 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{503}{3} \\ m = -167 \end{cases}$$

Câu 2.

1. Điều kiện $x \geq 1$.

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4 + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$2. \begin{cases} x^2 + x - 2xy = 2 \\ x^4 + x^2 - 4x^3y = 4 - 4x^2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 2 - x \\ (x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2) + x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 2 - x \\ (x^2 - 2xy)^2 + x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 2 - x \\ (2-x)^2 - x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy = 2 - x (*) \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

+) với $x = 0$, thay vào (*) ta được $0 = 2$ (vô lý)

+) với $x = 2$, thay vào (*) ta được $y = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất (2;1)

Câu 3.

$$1. \quad x^3 + y^3 + x^2(3y + 2z) + y^2(3x + 2z) + z^2(x + y) + 4xyz = 2023.$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3x^2y + 2x^2z + 3xy^2 + 2y^2z + z^2x + z^2y + 4xyz = 2023$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + (2x^2z + 2y^2z + 4xyz) + (z^2x + z^2y) = 2023$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 + 2z(x + y)^2 + z^2(x + y) = 2023$$

$$\Leftrightarrow (x + y)[(x + y)^2 + 2z(x + y) + z^2] = 2023$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + y + z)^2 = 7.17^2$$

$$\text{Vì } x, y, z \text{ nguyên dương nếu ta có } x + y + z > 0, \text{ do đó: } \begin{cases} x + y = 7 \\ x + y + z = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 7 \\ z = 10 \end{cases}$$

Có $x + y = 7$ mà x, y nguyên dương nên ta có

x	1	2	3	4	5	6
y	6	5	4	3	2	1

KL: các bộ số cần tìm là (1;6;10);(3;4;10);(9;4;3;10);(5;2;10);(6;1;10)

2. Xét tất cả các cách nối 2024 cặp điểm (đỏ với xanh) bằng 2024 đoạn thẳng, các cách nối như vậy luôn luôn tồn tại do chỉ có 2024 cặp điểm nên số tất cả các cách nối như vậy là hữu hạn.

Do đó, tìm được một cách nối có tổng độ dài bằng các đoạn thẳng là ngắn nhất.

Ta chứng minh rằng đây là một cách nối phải tìm

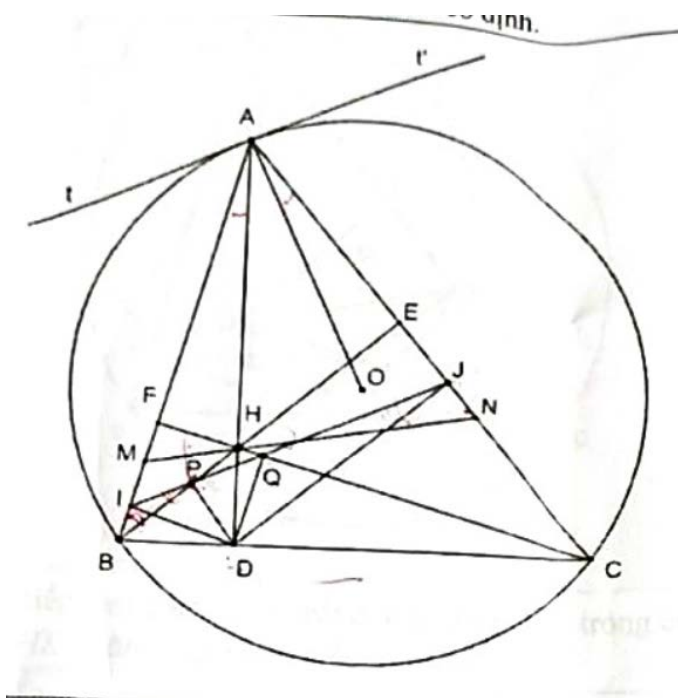
Thật vậy, giả sử ngược lại ta có hai đoạn thẳng AX và BY mà cắt nhau tại điểm O (giả sử A và B tô màu đỏ, còn X và Y tô màu xanh). khi đó nếu ta thay đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, các đoạn thẳng khác giữ nguyên thì ta có cách nối này có tính chất:

$$AY + BX < (AO + OY) = (AO + OX) + (BO + OY) \Rightarrow AY + BX < AX + BY$$

Như vậy, việc thay hai đoạn thẳng AX và BY bằng hai đoạn thẳng AY và BX, ta nhận được một cách nối mới có tổng độ dài các đoạn thẳng là nhỏ hơn. Vô lý, vì trái với giả thiết là đã chọn một cách nối có tổng các độ dài là bé nhất.

Điều vô lý chứng tỏ: cách nối có tổng độ dài các đoạn thẳng là ngắn nhất là không có điểm chung.

Câu 4.



4.1. chứng minh tam giác AMN cân tại A.

Vì $BE \perp AC = E$ nên $HEC = 90^\circ$

Vì $CF \perp AB = F$ nên $HFB = 90^\circ$

$$\Rightarrow FMH + MHF = 90^\circ; ENH + NHE = 90^\circ (1)$$

Vì HN là phân giác của góc CHE nên $CHN = NHE$

Lại có $CHN = MHF$ (đối đỉnh) nên $NHE = MHF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $FMH = ENH$ hay $AMN = ANM$

2. Chỉ ra tứ giác BIPD nội tiếp nên $IBD + IPD = 180^\circ$ (3)

Lại có $FHA = QHD(\text{đôi đỉnh}) \Rightarrow IBD = QHD$;

Chỉ ra tứ giác DPHQ nội tiếp nên QHD = QPD $\Rightarrow$ IBD = QPD (4)

Từ (3) và (4) suy ra $QPD + IPD = 180^0$ nên ba điểm I, P, Q thẳng hàng

Chứng minh tương tự ta được P, Q, J thẳng hàng.

Vậy 4 điểm I, P, Q, J thẳng hàng.

Từ tứ giác BIPD nội tiếp chỉ ra $MIP = PDB$

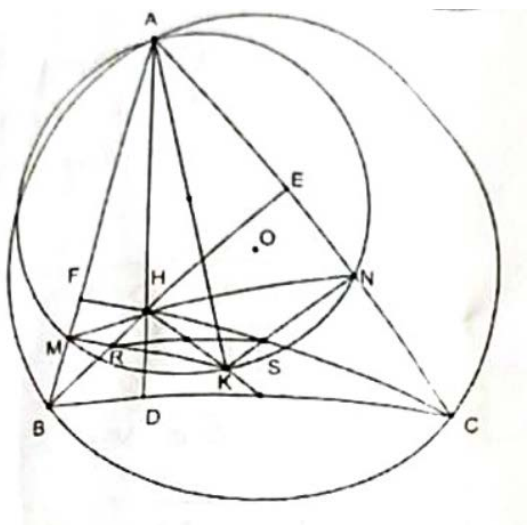
Lại có $PD \parallel AC$ (cùng vuông góc với BE) nên $PDB = ACB$

Qua A kẻ tiếp tuyến tAt' của (O) suy ra $AO \perp At$; $tAB = ACB$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo $\widehat{AB}$)

$$\text{Suy ra } t_{AI} = AIP$$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $IP // At \Rightarrow IP \perp AO$ (đpcm)

3.



Vì tam giác AMN cân tại A và AK là phân giác góc MAN nên AK là trung trực của MN suy ra AK là đường kính của đường tròn ngoại tiếp AMN

$$AKM = ANK = 90^\circ \Rightarrow KM \parallel CF ; KN \parallel BE$$

Gọi $R = KM \cap BH; s = KN \cap HC \Rightarrow HRKS$ là hình bình hành suy ra HK đi qua trung điểm của RS (5)

Từ MR//FH $\Rightarrow \frac{HR}{RB} = \frac{FM}{MB}$;

Vì HN là phân giác của góc CHE nên HM là phân giác của góc BHF $\Rightarrow \frac{FM}{MB} = \frac{FH}{HB}$

$$\text{Từ } SN//HE \Rightarrow \frac{HS}{SC} = \frac{EN}{NC};$$

Vì HN là phân giác của góc CHE nên $\frac{EN}{NC} = \frac{HE}{HC}$

$$\text{Chỉ ra } \triangle FHB \sim \triangle EHC \text{ (góc - góc)} \Rightarrow \frac{FH}{NC} = \frac{HE}{HC}$$

$$\Rightarrow \frac{HR}{RB} = \frac{HS}{SC} \Rightarrow RS//BC \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra HK luôn đi qua trung điểm của BC (cố định).

Câu 5

Từ giả thiết $x + y + z = xyz$, ta có $\frac{1}{xy} = \frac{1}{yz} = \frac{1}{xz} = 1$.

Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z} \Rightarrow a, b, c > 0$;

Giả thiết trở thành $ab + bc + ca = 1$; $P = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

Đề ý rằng:

$$a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = (a+b)(a+c)$$

$$b^2 + 1 = b^2 + ab + bc + ca = (b+a)(b+c)$$

$$c^2 + 1 = c^2 + ab + bc + ca = (c+a)(c+b)$$

Lúc này ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \\ &= \sqrt{\frac{a}{a+b}} \cdot \sqrt{\frac{a}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+a}} \cdot \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \cdot \sqrt{\frac{c}{c+b}} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cô-si (AM-GM), ta có:

$$P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+a} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{c+b} \right) \text{ hay } P \leq \frac{3}{2}.$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x = y = z = \sqrt{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$.