

Câu I:

1. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 1012$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + y^2 + z^2$.

2. Cho các số thực x, y, a, b với $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$ và $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}$. Chứng minh rằng $\frac{x^{2024}}{a^{1011}} + \frac{y^{2024}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}}$

Câu II.

1. Giải phương trình $x^2 + x - 2 - (x+6)\sqrt{x+1} = 0$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 8y = 1 + 4xy^2 \\ 2x^4 + 8y^4 = 2x + y \end{cases}$$

Câu III.

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2(x^2 + 7) = (2x + y + 2)(y + 2)$.

2. Cho a, b là các số nguyên, chứng minh rằng $F = a^5(b+5) - a(b^5+5)$ chia hết cho 30.

Câu IV. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC . Đường thẳng đi qua hai điểm M, N cắt (O) tại hai điểm P, Q (với M nằm giữa P và N). Gọi D là một điểm trên cạnh AB (với D khác A, D khác B), đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt BC tại I (I khác B). Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại K .

1. Chứng minh các điểm C, I, P, K cùng thuộc một đường tròn.

2. Chứng minh $\frac{QB}{QC} = \frac{PK}{PD}$

3. Đường thẳng AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (G khác P). Đường thẳng IG cắt AB tại E . Chứng minh rằng khi D di chuyển trên cạnh AB thì tỉ số $\frac{S_{APD}}{S_{AQE}}$

không đổi.

Câu V. Hai bạn X và Y tham gia một trò chơi. Có một tờ giấy đã viết 47 số nguyên từ 1 đến 47 và một hộp đựng n viên bi. X là người chơi trước, Y là người chơi sau và sở hữu hộp bi. Hai người luân phiên thực hiện gạch số, mỗi lượt chơi thì người chơi gạch đi 5 số. Sau khi X chơi xong lượt cuối cùng thì còn lại 2 số, hai số đó chênh lệch bao nhiêu thì Y phải đưa cho X bấy nhiêu viên bi. Nếu Y hết bi hoặc không đủ số bi để đưa cho X thì X thắng cuộc, ngược lại nếu Y còn ít nhất một viên bi thì Y thắng cuộc.

1. Với $n = 27$, chứng minh rằng Y luôn có cách chơi để thắng cuộc.

2. Với $n = 26$, chứng minh rằng X luôn có cách chơi để thắng cuộc.

ĐÁP ÁN

Câu I.

$$1. \quad x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 1012$$

$$x^2 - yz = y^2 - zx$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2) + (2x - yz) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Tương tự ta có } \begin{cases} y = z \\ z = x \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x = y \\ y = z \\ z = x \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Xét trường hợp $x = y$ (trường hợp $y = z, z = x$ thực hiện tương tự), thay vào gt ta được

$$x^2 - xz = x^2 - zx = z^2 - x^2 = 1012$$

$$\Rightarrow x^2 - zx = z^2 - x^2 = 1012$$

$$\Rightarrow x(x - z) + (x - z)(x + z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x + z)(x - z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ z = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x = y \\ z = -2x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - yz = 0 \neq 1012 \\ z^2 - xy = \frac{3z^2}{4} = 1012 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4048}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2 = \frac{z^2}{4} = \frac{1012}{3}$$

$$\Rightarrow P = x^2 + y^2 + z^2 = 2024$$

Xét trường hợp $x + y + z = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) = 1012.3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) = 6072 \Leftrightarrow P = 2024$$

Vậy $P = 2024$.

$$2. \text{ Từ gt ta có } (a+b)\left(\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b}\right) = 1 = (x^2 + y^2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4 + \frac{bx^4}{a} + y^4 + \frac{ay^4}{b} = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$$

$$\Leftrightarrow b^2x^4 + a^2y^4 = 2bx^2ay^2 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (bx^2 - ay^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow bx^2 = ay^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{a}{a+b}; y^2 = \frac{b}{a+b}$$

Do đó: $\frac{x^{2024}}{a^{1011}} + \frac{y^{2024}}{b^{1011}} = \frac{a^{1012}}{a^{1011} \cdot (a+b)^{1012}} + \frac{b^{1012}}{b^{1011} (a+b)^{1012}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}}$

Vậy $\frac{x^{2024}}{a^{1011}} + \frac{y^{2024}}{b^{1011}} = \frac{1}{(a+b)^{1011}}$

Câu II.

1. $x^2 + x - 2 - (x+6)\sqrt{x+1} = 0 \quad (x \geq -1)$

Đặt $a = \sqrt{x+1} (a \geq 0) \Rightarrow x = a^2 - 1$

Ta có pt: $(a^2 - 1)^2 + (a^2 - 1) - 2 = (a^2 + 5)a$

$$\Leftrightarrow a^4 - a^3 - a^2 - 5a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 2a - 1)(a^2 + a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \quad (\text{do } a^2 + a + 2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{2} + 1 \quad (\text{do } a \geq 0)$$

Với $a = \sqrt{2} + 1$ thì $x = a^2 - 1 = 2\sqrt{2} + 2$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2\sqrt{2} + 2$

2. $\begin{cases} x^3 + 8y = 1 + 4xy^2 & (1) \\ 2x^4 + 8y^4 = 2x + y & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8y - 4xy^2 = 1 \\ 2x^4 + 8y^4 = 2x + y \cdot 1 = (2x + y) \cdot (x^3 + 8y - 4xy^2) & (3) \end{cases}$

Giải (3): $2x^4 + 8y^4 = 2x + y \cdot 1 = (2x + y) \cdot (x^3 + 8y - 4xy^2)$

$$\Leftrightarrow xy \cdot (x^2 - 8xy + 12y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x - 6y)(x - 2y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 6y \\ x = 2y \end{cases}$$

$$+ \text{Xét } x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$+ \text{Xét } y = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$+ \text{Xét } x = 6y \text{ ta có hệ } \begin{cases} 200y^3 = 1 \\ 2600y^4 = 13y \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{200}} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt[3]{200}}$$

$$+ \text{Xét } x = 2y \text{ ta được } \begin{cases} 8y^3 = 1 \\ 40y^4 = 5y \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2y = 1$$

Thử lại ta thấy 4 cặp giá trị (x, y) đều thỏa mãn hệ.

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } (x, y) \in \left\{ \left(0, \frac{1}{2}\right); \left(1, \frac{1}{2}\right); (1, 0); \left(\frac{1}{\sqrt[3]{200}}, \frac{6}{\sqrt[3]{200}}\right) \right\}$$

Câu III.

$$1. \quad x^2(x^2 + 7) = (2x + y + 2)(y + 2)$$

Đặt $a = y + 2$ ta được

$$x^2(x^2 + 7) = (2x + a)a$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + 8x^2 + 16) - (x^2 + 2ax + a^2) = 16$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4)^2 - (x + a)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4 + x + a)(x^2 + 4 - x - a) = 16 \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2, a \in \mathbb{Z}$ và $(x^2 + 4 + x + a)(x^2 + 4 - x - a) = 2x^2 + 8$ chẵn và ≥ 8

$(x^2 + 4 + x + a), (x^2 + 4 - x - a)$ cùng dấu nên 16 chỉ có thể tách thành 4.4; 8.2; 2.8

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x^2 + 4 + x + a = 4, 8, 2 \\ x^2 + 4 - x - a = 4, 2, 8 \end{cases}$$

Ta có bảng sau:

$x^2 + 4 + x + a$	4	8	2
$x^2 + 4 - x - a$	4	2	8
x^2	0	1	1
x	0	1	-1
a	0	2	-4
y	-2	0	-6

$$\text{Vậy } (x, y) \in \{(0, -2); (1, 0); (-1, 2); (1, -6); (-1, -4)\}$$

$$2. \quad F = a^5(b + 5) - a(b^5 + 5)$$

$$= b(a^5 - a) - a(b^5 - b) + 5(a^5 - a)$$

$$= (b + 5)(a^5 - a) + a(b^5 - b); a, b \in \mathbb{Z}$$

Ta có: $a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 - 4 + 5)$
 $= (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5(a - 1)a(a + 1)$

+) $(a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên sẽ luôn có 1 số chia hết cho 5, 1 số chia hết cho 3, 1 số chia hết cho 2.

Mà $(5, 3, 2) = 1$ nên tích này chia hết cho $5.3.2 = 30$

+) $(a - 1)a(a + 1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 3, 1 số chia hết cho 2.

Mà $(3, 2) = 1$ nên tích này chia hết cho 6

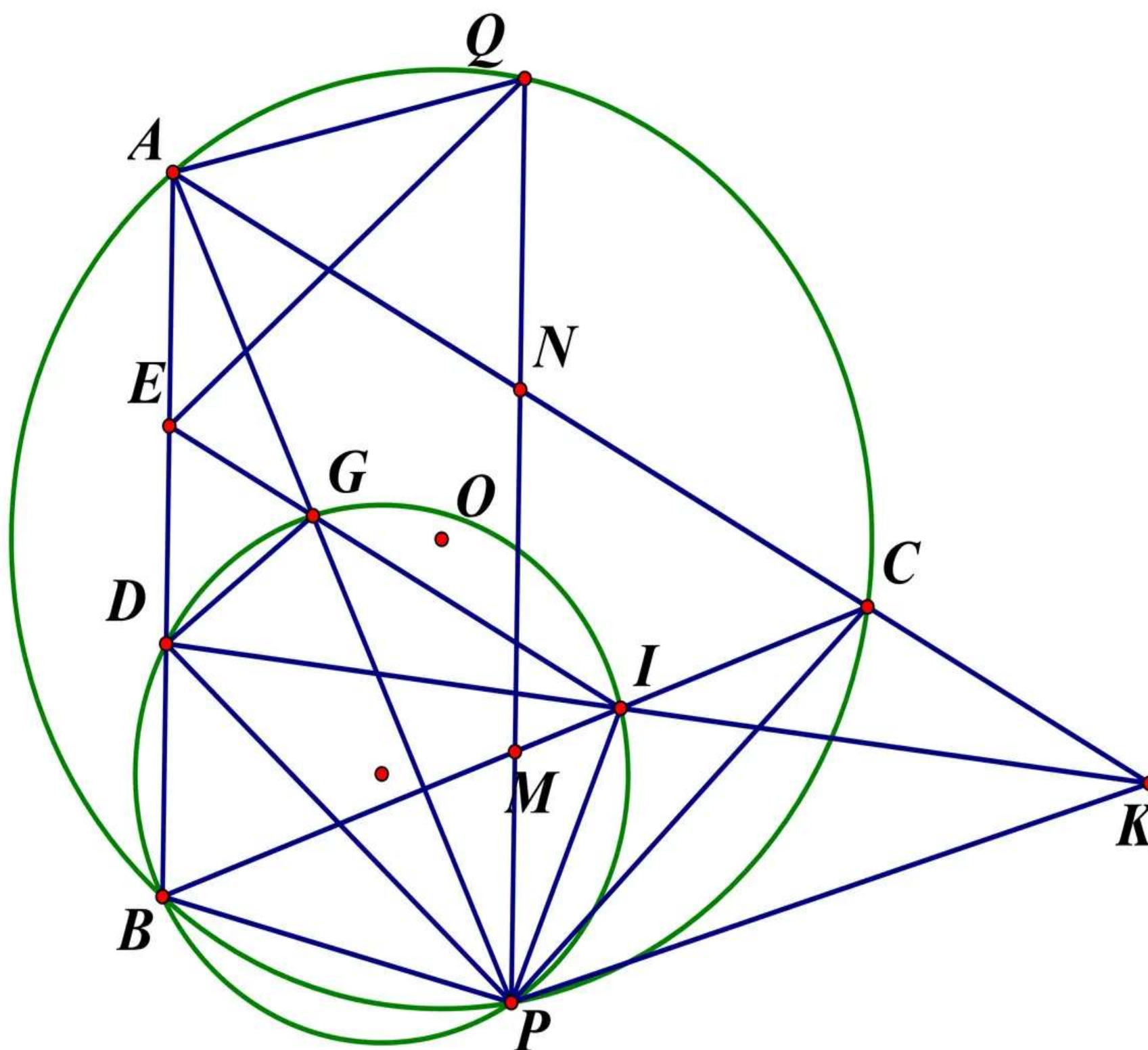
$$\Rightarrow 5.(a - 1)a(a + 1) : 30$$

Vậy $a^5 - a$ chia hết cho 30 $\forall a \in \mathbb{Z}$

Tương tự ta có $b^5 - b$ chia hết cho 30 $\forall b \in \mathbb{Z}$

Vậy F chia hết cho 30 $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Câu IV.



Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPD.

a) Tứ giác ABPC nội tiếp (O) $\Rightarrow PCK = 180^\circ - PCA = ABP$

Tứ giác BDIP nội tiếp (O') $\Rightarrow PIK = 180^\circ - PID = PBD = ABP$

$$\Rightarrow PCK = PIK$$

Mà C, I là hai đỉnh kề nhau nên PICK nội tiếp (đpcm)

b) PICK nội tiếp (cmt) $\Rightarrow PKI = PCI$ (cùng chắn cung PI)

$\Rightarrow PKD = PCB = PQB$ (cùng chắn cung PB của (O))

Trong (O) có $BQM = PCM$ (cùng chắn cung BP của (O))

Và $BMQ = PMC$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BQM \sim \Delta PCM (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{QB}{QM} = \frac{CP}{CM} \quad (1)$$

Tương tự ta có: $\Delta QCM \sim \Delta BPM (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{QC}{QM} = \frac{BP}{BM} \quad (2)$$

Chia (1) cho (2) về với về ta được:

$$\frac{QB}{QC} = \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CP}{BP} = \frac{CP}{BP} \quad (\text{M là trung điểm của BC})$$

Trong (O') có $PBI = PDI$ hay $PBC = PDK$

Lại có $PCB = PKD$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta BPC \sim \Delta DPK (g - g)$

$$\Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PK}{PD} \Rightarrow \frac{PK}{PD} = \frac{CP}{BP}$$

$$\text{Vậy } \frac{QB}{QC} = \frac{PK}{PD} \left(= \frac{CP}{BP} \right) \quad (\text{đpcm})$$

c) Trong tam giác ABC có MN là đường trung bình

$\Rightarrow MN \parallel AB$

$\Rightarrow PQ \parallel AB$

$\Rightarrow d(Q, AB) = d(P, AB)$ (trong đó $d(P, AB)$ là khoảng cách từ P đến AB, tương tự với $d(Q, AB)$)

$$\Rightarrow \frac{S_{APD}}{S_{AQE}} = \frac{0,5 \cdot AD \cdot d(P, AB)}{0,5 \cdot AE \cdot d(Q, AB)} = \frac{AD}{AE}$$

Chứng minh được $\Delta ADG \sim \Delta APB (g - g) \Rightarrow \frac{AD}{AG} = \frac{AP}{AB}$

$$\Delta AEG \sim \Delta CPB (g - g) \Rightarrow \frac{AE}{AG} = \frac{CP}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{BC}{AB}$$

Do A, B, C cố định $\Rightarrow M, N$ cố định $\Rightarrow P$ cố định

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AP}{CP} \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} \text{ không đổi}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{APD}}{S_{AQE}} \text{ không đổi (đpcm)}$$

Câu V.

1. Với $n = 27$ thì số bi Y giữ là 27 và có chiến thuật để Y thắng như sau

+ Mỗi lần X xóa 5 số bất kì thì Y xóa 5 số bé nhất còn lại, trò chơi cứ tiếp tục và Y sẽ thắng.

+ Giải thích: Mỗi người được xóa 5 số nên X sẽ được chơi 5 lượt, Y được chơi 4 lượt. Vì Y sẽ xóa những số bé nhất có thể nên chắc sẽ có những số sau bị xóa 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20 (số).

Như vậy 2 số còn lại sau khi thực hiện trò chơi xong sẽ nằm trong tập

$$\{21; 22; 23; \dots; 46; 47\}$$

Mà hiện số này lớn nhất là $47 - 21 = 26$ tức là Y sẽ luôn còn ít nhất $27 - 26 = 1$ viên nên Y thắng cuộc.

2. Với $n = 26$, X có chiến thuật để thắng như sau:

+ Ở lượt đầu tiên X xóa 5 số sau: 22, 23, 24, 25, 26

+ Chia $47 - 5 = 42$ số còn lại vào 21 nhóm sau: (1; 27); (2; 28); (3; 29); ...; (21; 47) các nhóm này đều có hiệu giữa số lớn và số bé là 26

+ Cứ mỗi lượt Y xóa 5 số thuộc 5 nhóm khác nhau thì X xóa 5 số còn lại của 5 nhóm đó, trường hợp Y xóa cả 2 số của 1 nhóm thì X cũng xóa 2 số của 1 nhóm khác.

Như vậy 2 số cuối cùng luôn cùng 1 nhóm, chúng có hiệu là 26.

Vậy X thắng cuộc.