

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024**

Bài thi: TOÁN

Dành cho thí sinh dự thi vào các lớp chuyên: Toán, Tin học

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu I (2,0 điểm). Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $|P| - P = 0$.

Câu II (2,0 điểm).

1. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m+2)x - m - 8$ (với m là tham số). Tìm các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung, có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_2 = 0$.

2. Tìm các nghiệm nguyên (x; y) của phương trình $2024(x^2 + y^2) - 2023(2xy + 1) = 5$.

Câu III (2,0 điểm).

1. Giải phương trình $3x^3 - 7x^2 + 6x + 4 = 3\sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

Câu IV (3,0 điểm).

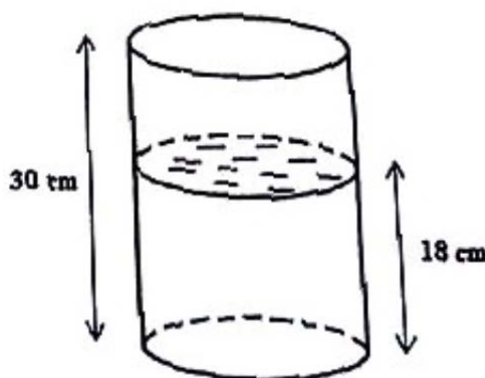
1. Cho tam giác ABC đều, nội tiếp đường tròn (O;R), H là trung điểm của cạnh BC. M là điểm bất kì thuộc đoạn BH (M khác B). Lấy điểm N thuộc đoạn CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là trung điểm của đoạn MN.

a) Chứng minh bốn điểm O, M, H, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh diện tích tam giác 14B không đổi. Xác định vị trí của điểm M để đoạn thẳng MN có độ dài nhỏ nhất.

2. Có một bình thủy tinh hình trụ cao 30cm chứa nước, diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung

quanh, mặt nước cách đáy bình là 18cm (hình vẽ bên). Cần đổ thêm bao nhiêu lít nước nữa để nước vừa đầy bình (Bỏ qua bề dày của bình, cho $\pi = 3,14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?



Câu V (1,0 điểm). Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $T = \sqrt{\frac{a}{3b^2c^2+abc}} + \sqrt{\frac{b}{3a^2c^2+abc}} + \sqrt{\frac{c}{3a^2b^2+abc}}$
-----HẾT-----

LỜI GIẢI

Câu I

a) Ta có: $P = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2} \geq 0, x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$

$$P = \frac{x}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-x\sqrt{x}-2}{x-3\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{x(\sqrt{x}-2) + 2(\sqrt{x}-1) + 2x-x\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{x\sqrt{x} + 2x - 2\sqrt{x} - 2 + 2x - x\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}$$

$$P = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

b) $|P| - P = 0 \Leftrightarrow |P| = P \Leftrightarrow P > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > 1$$

Kết hợp với ĐKXD: $x \neq 1, x \neq 4$

Câu II

1. Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = (m+2)x - m - 8$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + m + 8 = 0$$

Vì phương trình có hai nghiệm nằm bên phải trục tung nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m+2 > 0 \\ m+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 28 > 0 \\ m+2 > 0 \\ m+8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2\sqrt{7} \\ m > -2 \\ m > -8 \end{cases} \Rightarrow m > 2\sqrt{7}$$

Áp dụng Vi-et và kết hợp giả thiết ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 - x_2 = 0(1) \\ x_1 + x_2 = m+2 \\ x_1 x_2 = m+8 \end{cases} \Rightarrow (I) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt[4]{m+8} \\ x_2 = (\sqrt[3]{m+8})^3 \end{cases} \text{ Thay vào (1) ta có :}$$

$$\sqrt[4]{m+8} + (\sqrt[4]{m+8})^3 = m+2. \text{ Đặt } \sqrt[4]{m+8} = a \left(a > \sqrt[4]{2\sqrt{7}+8} \right). \text{ Phương trình trở thành :}$$

$$a + a^3 = a^4 - 6 \Leftrightarrow a^4 - a^3 - a - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(a^3 + a^2 + 2a + 3) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$a = 2 \Rightarrow \sqrt[4]{m+8} = 2 \Leftrightarrow m = 8(\text{tmdk})$$

Vậy $m = 8$

2

$$2024(x^2 + y^2) - 2023(2xy + 1) = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2023(x^2 + y^2) - 2023.2xy - 2023 = 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2023(x^2 + y^2 - 2xy) = 5 + 2023$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2023(x-y)^2 = 2028 \quad (*)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$. Do đó $|x-y|$ là số tự nhiên

Nhận xét: Nếu $|x - y| \geq 2$ thì $(x - y)^2 \geq 4 \Rightarrow 2023(x - y)^2 \geq 8092$

Do đó $x^2 + y^2 + 2023(x - y)^2 > 2028$

Nên (*) không xảy ra. Nên $|x - y| \leq 1$

Vậy có $|x - y| \in \{0; 1\}$

* Xét $|x - y| = 0$. Ta có: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

Với $x = y$, từ (*) có $2x^2 = 2028$ mà $x, y \in \mathbb{Z}$ nên loại.

* Xét $|x - y| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Với $x = y$, từ (*) có $x^2 + (x - y)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 5$

+ Xét $y = x - 1$. Ta có $x^2 + (x - 1)^2 = 5 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 5$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \cdot \text{Với} \begin{cases} x = 2 & y = 2 \\ x = -1 & y = -1 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(-1; -2), (2; 1), (1; 2), (-2; -1)$

Câu III.

1.

ĐKXD: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$3x^3 - 7x^2 + 6x + 4 = 3\sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 16x^2 + 6x + 2 + 3\sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$$

Đặt $\sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}} = t$, ta có:

$$3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 3t^3 + 3t$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = t^3 + t$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^3 + (x + 1) = t^3 + t$$

$$\Leftrightarrow (x + 1 - t) [(x + 1)^2 - (x + 1)t + t^2 + 1] = 0$$

$$\text{Mà } (x + 1)^2 - (x + 1)t + t^2 + 1 > 0 \Rightarrow x + 1 - t = 0$$

$$\Rightarrow x + 1 = t$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{\frac{16x^2 + 6x + 2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 + 12x + 6 = 16x^2 + 6x + 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 4x - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Thử lại thấy cả 3 nghiệm thỏa mãn.

$$\text{Vậy } x \in \left\{1; \frac{2+\sqrt{7}}{3}; \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right\}$$

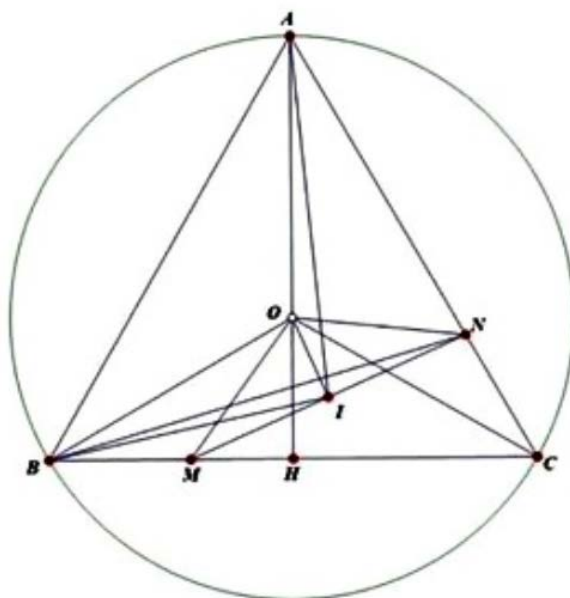
$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \quad (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2 + 3(1-y)x + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1-y)(2x+1-y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{y-1}{2} \\ x = y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + (2x+1)^2 + x + 2x+1 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{11}{5} \end{cases} \\ y = x+1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + (x+1)^2 + x + x+1 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -3; y = -2 \end{cases} \end{cases}$$

$$(x; y) \in \left\{(-2; -3); \left(\frac{3}{5}; \frac{11}{5}\right); (1; 2); (-3; -2)\right\}$$

Câu IV



a) Xét $\triangle OBM$ và $\triangle OCM$ có:

$$\left. \begin{array}{l} BM = CN \\ \angle CBM = \angle OCN \\ OB = OC \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBM \sim \triangle OCM \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow OM = ON$ hay O nằm trên đường trung trực MN

$\Rightarrow OI \perp MN$

Xét tứ giác OIHM có: $\angle OIM = \angle OHM = 90^\circ$

$\Rightarrow$ OIHM nội tiếp hay 4 điểm O, M, H, I cùng thuộc 1 đường tròn.

b) Chứng minh được $IH \parallel AB$. Từ đó suy ra đường cao hạ từ I và từ H cùng vuông góc với AB có độ dài bằng nhau. Do đó, diện tích tam giác IAB luôn bằng diện tích tam giác AHB không đổi

Theo chứng minh câu a) có $OI \perp MN$ và $\angle MON = 90^\circ$ nên

$$MN = 2MI = 2 \cdot OM \cdot \sin 60^\circ = OM\sqrt{3}$$

Khi M chuyển động trên BH thì $OM \geq OH$ với dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng H. Từ đó suy ra:

$$\min MN = OH\sqrt{3}$$

đạt được khi và chỉ khi M trùng H.

2.

Diện tích đáy bình bằng $\frac{1}{6}$ diện tích xung quanh $\Rightarrow \pi r^2 = \frac{1}{6} \cdot 2\pi r h \Rightarrow h = 3r$

Ta có: $h = 30 \Rightarrow r = 10$

Thể tích nước cần đổ thêm để vừa đầy bình là: $V = \pi r^2 \cdot (h - 18) = 3,14 \cdot 10^2 \cdot 12 = 3768(\text{cm}^3)$

Câu V:

Theo bài ra, ta có: $a, b, c > 0$ và $ab + bc + ca = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

Đặt $\frac{1}{a}$ là x ; $\frac{1}{b}$ là y ; $\frac{1}{c}$ là z ($x, y, z > 0$; $x + y + z = 3$)

$$\text{Suy ra: } \sqrt{\frac{a}{3b^2c^2 + abc}} + \sqrt{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{3}{y^2z^2} + \frac{1}{xyz}}} + \sqrt{\frac{y^2z^2}{x(x+y+z) + yz}} = \sqrt{\frac{y^2z^2}{3x + xy}}$$

$$\text{Suy ra: } T \leq \frac{1}{2} \left(\frac{yz + zx}{x + y} + \frac{yz + yx}{x + z} + \frac{xy + zx}{y + z} \right) = \frac{1}{2} (x + y + z) = \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$