

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1. (4 điểm)

- a) Chứng minh biểu thức $S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên
- b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y) + 3(2x+y) - 5(x-y) = 22$

Câu 2. (4 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{a-1} + \frac{3a+5\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \right] \begin{matrix} (a > 0) \\ (a \neq 1) \end{matrix}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) - 40y = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 40 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (4 điểm)

- a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}$
- b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq \frac{9a^2b^2c^2}{1 + 2a^2b^2c^2}$$

Câu 4. (4 điểm) Cho đường tròn tâm O có đường kính $MN = 2R$. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) (A khác M và A khác N). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt đường thẳng MA, MB lần lượt tại các điểm I, K

- a) Chứng minh tứ giác $ABKI$ nội tiếp
- b) Khi đường kính AB quay quanh tâm O thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính AB để tứ giác $ABKI$ có diện tích nhỏ nhất

Câu 5. (4 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B). Gọi I là điểm chính giữa cung AC , E là giao điểm của AI và BC . Gọi K là giao điểm của AC và BI

- a) Chứng minh rằng $EK \perp AB$
- b) Gọi F là điểm đối xứng với K qua I. Chứng minh AF là tiếp tuyến của (O)
- c) Nếu $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Gọi H là giao điểm của EK và AB . Chứng minh

$$KH.(KH + 2HE) = 2HE.KE$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (4 điểm)

a) Chứng minh biểu thức $S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho

120, với n là số nguyên

$$\begin{aligned} S &= n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1 \\ &= n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6) = n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

Trong 5 số nguyên liên tiếp có 1 số chia hết cho 2;3;4;5

Nên $S : (2.3.4.5) \Rightarrow S : 120$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y) + 3(2x+y) - 5(x-y) = 22$

$$(2x+y)(x-y) + 3(2x+y) - 5(x-y) = 22$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)(x-y+3) - 5(x-y+3) = 7$$

$$\Leftrightarrow (2x+y-5)(x-y+3) = 7 = 1.7 = 7.1 = (-7).(-1) = (-1).(-7)$$

Sau khi thử các trường hợp ta được $(x; y) \in \{(-2; 8), (-2; 2)\}$

Câu 2. (4 điểm)

c) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{a-1} + \frac{3a+5\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \right] \begin{matrix} (a > 0) \\ (a \neq 1) \end{matrix}$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{a}}{a-1} + \frac{3a+5\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \right] \begin{matrix} (a > 0) \\ (a \neq 1) \end{matrix} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1) + 3a+5\sqrt{a}}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{16a} = \frac{(4a+4\sqrt{a})}{(\sqrt{a}+1)16a} = \frac{4\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)16a} = \frac{1}{4\sqrt{a}} \end{aligned}$$

d) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) - 40y = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 40 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) - 40y = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 \quad (1) \\ x^2 + 6y^2 = 40 \end{cases} \quad (2)$$

$$x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \Rightarrow 4y^2 + 6y^2 = 40 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = -4 \\ y = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{11y^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 (ktm) \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (2; 4), (-2; -4)$

Câu 3. (4 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}$

Theo hệ thức Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases} \quad (1)$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (-5)^2 - 4(m-2) > 0 \\ 5 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < \frac{33}{4}. \text{ Ta có :}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}) = 3\sqrt{x_1 x_2} \Rightarrow 4(x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}) = 9x_1 x_2$$

Thay (1) vào ta được :

$$\Rightarrow 4(5 + 2\sqrt{m-2}) = 9(m-2) \Rightarrow 9(m-2) - 8\sqrt{m-2} - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{m-2} = 2 \Leftrightarrow m = 6 (tmdk) \\ \sqrt{m-2} = -\frac{10}{9} (ktm) \end{cases}$$

Vậy $m = 6$

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2 b + b^2 c + c^2 a \geq \frac{9a^2 b^2 c^2}{1 + 2a^2 b^2 c^2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(a^2 b + b^2 c + c^2 a) \left(2 + \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \right) \geq 9 \Leftrightarrow 2(a^2 b + b^2 c + c^2 a) + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{bc^2} + \frac{1}{ca^2} \geq 9$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cosi cho bộ ba số :

$$a^2b + a^2b + \frac{1}{ab^2} \geq 3\sqrt[3]{a^2b \cdot a^2b \cdot \frac{1}{ab^2}} = 3a$$

$$b^2c + b^2c + \frac{1}{bc^2} \geq 3\sqrt[3]{b^2c \cdot b^2c \cdot \frac{1}{bc^2}} = 3b$$

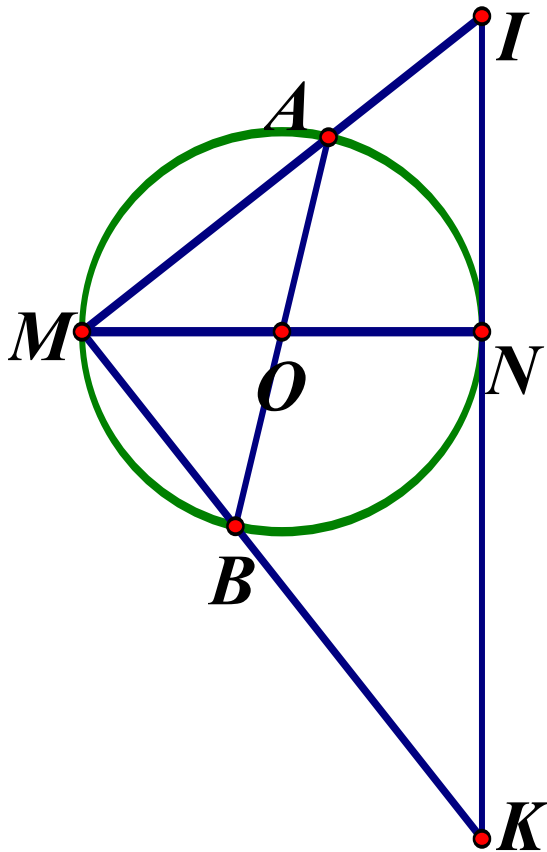
$$c^2a + c^2a + \frac{1}{ca^2} \geq 3\sqrt[3]{c^2a \cdot c^2a \cdot \frac{1}{ca^2}} = 3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được :

$$2(a^2b + b^2c + c^2a) + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{bc^2} + \frac{1}{ca^2} \geq 3(a + b + c) = 9$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$

Câu 4. (4 điểm) Cho đường tròn tâm O có đường kính $MN = 2R$. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) (A khác M và A khác N). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt đường thẳng MA, MB lần lượt tại các điểm I, K



c) Chứng minh tứ giác $ABKI$ nội tiếp

Ta có : $\angle MBA = \angle MNA$ (cùng chắn cung MA)

Mà $\angle MNA = \angle MIN$ (cùng phụ với $\angle AMN$)

Suy ra $\angle MBA = \angle MIN$, mà $\angle MBA + \angle ABK = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Nên $\angle MIN + \angle AB = 180^\circ$ suy ra tứ giác $ABKI$ nội tiếp (tổng 2 góc đối là 180°)

d) Khi đường kính AB quay quanh tâm O thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính AB để tứ giác $ABKI$ có diện tích nhỏ nhất

Ta có $\angle AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tam giác vuông MIK có MN là đường cao

Suy ra $MN^2 = NK \cdot NI$

Ta có $2S_{ABKI} = 2S_{MIK} - 2S_{MAB} = 2R \cdot IK - MA \cdot MB = 2R(IN + NK) - MA \cdot MB$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có :

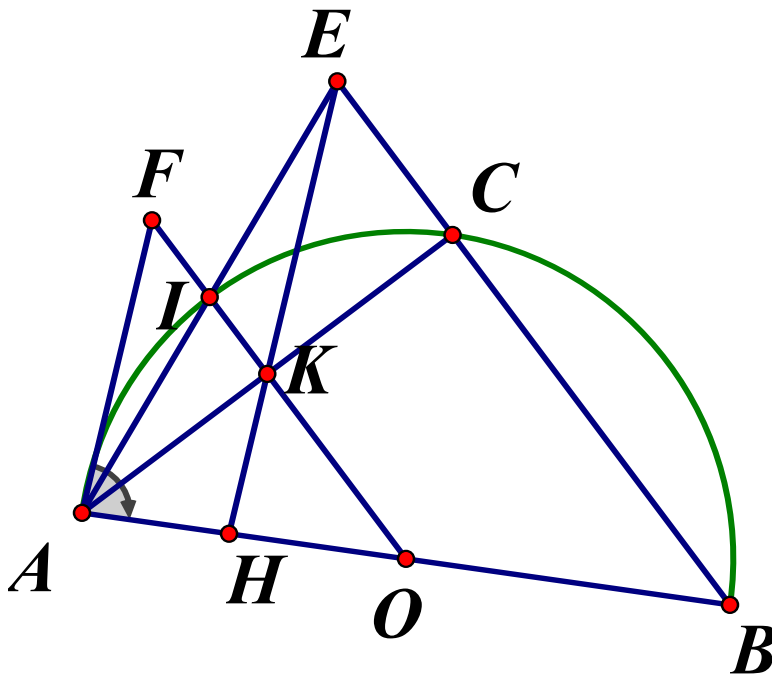
$$IN + NK \geq 2\sqrt{IN \cdot NK} = 4R; MA \cdot MB \leq \frac{MA^2 + MB^2}{2} = \frac{AB^2}{2} = 2R^2$$

Suy ra $2S_{ABKI} \geq 2R \cdot 4R - 2R^2 = 6R^2 \Rightarrow S_{ABKI} \geq 3R^2$

Dấu bằng xảy ra khi $IN = NK, MA = MB$

Vậy S_{ABKI} nhỏ nhất khi $AB \perp MN$

Câu 5. (4 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B). Gọi I là điểm chính giữa cung AC , E là giao điểm của AI và BC . Gọi K là giao điểm của AC và BI



d) Chứng minh rằng $EK \perp AB$

Ta có $\angle AIB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BI \perp AE$. Tương tự $AC \perp BE$
 $\Rightarrow \triangle AEB$ có hai đường cao AC, BI cắt nhau tại $K \Rightarrow K$ là trực tâm $\triangle AEB \Rightarrow EK \perp AB$

e) Gọi F là điểm đối xứng với K qua I . Chứng minh AF là tiếp tuyến của (O)

Do I là điểm chính giữa cung AC $\Rightarrow \widehat{IA} = \widehat{IC} \Rightarrow \angle IBA = \angle IBC$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Mà $\angle IAC = \angle IBC$ (cùng chắn cung IC) nên $\angle IAC = \angle IBA$

$\triangle FAK$ có AI là đường cao ($AI \perp BI$) đồng thời là đường trung tuyến (F và K đối xứng qua I) $\Rightarrow \triangle FAK$ cân tại A $\Rightarrow \angle FAI = \angle IAK$

Ta có $\angle FAB = \angle FAI + \angle IAB = \angle IAK + \angle IAB = \angle IBA + \angle IAB = 90^\circ$

$\Rightarrow AF \perp AB$ tại A nên AF là tiếp tuyến của (O)

f) Nếu $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Gọi H là giao điểm của EK và AB. Chứng minh

$$KH \cdot (KH + 2HE) = 2HE \cdot KE$$

Ta có $\sin \angle KAH = \frac{KH}{AK}$

$$\text{Mà } \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{KH}{AK} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{6}}{2} HK$$

$\triangle ABE$ có BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên $\triangle ABE$ cân tại B nên BI cũng là đường trung trực $\Rightarrow KA = KE$ ($K \in BI$)

$$EH = EK + KH = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \right) KH. \text{ Ta có :}$$

$$KH(KH + 2HE) = KH \left[KH + 2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \right) KH \right] = (3 + \sqrt{6}) KH^2$$

$$\text{Và } 2HE \cdot KE = 2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \right) HK \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} HK = (\sqrt{6} + 3) HK^2$$

$$\text{Suy ra } KH(KH + 2HE) = 2HE \cdot KE$$