

**Bài 1. ( 5.0 điểm):**

1. Cho biểu thức: 
$$P = \frac{2\sqrt{x}(6-\sqrt{x})+12}{x-9} + \frac{5-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tìm các giá trị của x để biểu thức  $P < 0$ .

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xyz = 4$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{15\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + \sqrt{xy} + 2} + \frac{5\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 3} + \frac{10\sqrt{z}}{3\sqrt{xz} + 2\sqrt{z} + 2}$$

**Bài 2. ( 5.0 điểm):**

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a.  $x^2 + 4x - 3 + 2x\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+7} = 0$       b. 
$$\begin{cases} x(3x+1) = y(-2y+7x+2) \\ x^2 + 3xy - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

2. Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = x - 3$ . Tìm trên parabol (P) hai điểm A và B sao cho  $AB = 3\sqrt{2}$  và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng (d), biết rằng điểm A có hoành độ âm.

**Bài 3. ( 5.0 điểm):** Cho đường tròn (O;R), dây BC cố định và  $BC = R\sqrt{3}$ . Trên cung lớn BC của (O) lấy điểm A bất kỳ (A khác điểm chính giữa của cung lớn BC). Gọi I là trung điểm của BC, H là giao điểm của hai đường cao BD và CE trong tam giác ABC. Hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và tam giác CDI cắt nhau tại K

a. CM: Tứ giác AEKD nội tiếp và 3 điểm A, K, I thẳng hàng

b. CM:  $HK \perp AI$  và tia KH là tia phân giác của góc BKE

c. CM:  $AD.HE + AE.HD$  có giá trị không đổi khi A di chuyển trên cung lớn BC.

**Bài 4. ( 2.0 điểm):** Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, AB, AC theo thứ tự lấy ba điểm M, N, P sao cho N khác A và B và  $\widehat{MNP} = 60^\circ$ . CMR:  $AB \geq 2\sqrt{AP.BM}$ . Dấu “=” xảy ra khi nào?

**Bài 5. ( 3.0 điểm):**

1. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn :  $x + y + z = 1$ . CMR:

$$\frac{x}{x + \sqrt{x+yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{y+zx}} + \frac{z}{z + \sqrt{z+xy}} \leq 1$$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

$$(x - 2022)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$$

- - - Hết - - -

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

## LỜI GIẢI

### Bài 1. ( 5.0 điểm):

1. Cho biểu thức: 
$$P = \frac{2\sqrt{x}(6-\sqrt{x})+12}{x-9} + \frac{5-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tìm các giá trị của x để biểu thức  $P < 0$ .

a. ĐK:  $x \geq 0; x \neq 9$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\sqrt{x}(6-\sqrt{x})+12}{x-9} + \frac{5-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} - \frac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(6-\sqrt{x})+12 - (5-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3) - (1-2\sqrt{x})(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{12\sqrt{x} - 2x + 12 - 15 - 2\sqrt{x} + x + 3 - 7\sqrt{x} + 2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x + 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

b. Để  $P < 0$  thì x thỏa mãn ĐK  $x \geq 0; x \neq 9$  và

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} &< 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 &< 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x} &< 3 \\ \Leftrightarrow x &< 9 \end{aligned}$$

Vậy  $0 \leq x < 9$  thì  $P < 0$ .

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $xyz = 4$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \frac{15\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + \sqrt{xy} + 2} + \frac{5\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 3} + \frac{10\sqrt{z}}{3\sqrt{xz} + 2\sqrt{z} + 2}$$

Với  $xyz = 4 \Rightarrow \sqrt{xyz} = 2$

$$\begin{aligned} M &= 5 \left( \frac{3\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + \sqrt{xy} + 2} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 3} + \frac{2\sqrt{z}}{3\sqrt{xz} + 2\sqrt{z} + 2} \right) \\ &= 5 \left( \frac{3\sqrt{x}}{3\sqrt{x} + \sqrt{xy} + \sqrt{xyz}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 3} + \frac{\sqrt{xyz}\sqrt{z}}{3\sqrt{xz} + \sqrt{xyz}\sqrt{z} + \sqrt{xyz}} \right) \\ &= 5 \cdot \frac{3 + \sqrt{y} + \sqrt{yz}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 3} = 5 \end{aligned}$$

### Bài 2. ( 5.0 điểm):

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a.  $x^2 + 4x - 3 + 2x\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+7} = 0$

$$b. \begin{cases} x(3x+1) = y(-2y+7x+2) \\ x^2 + 3xy - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

**HD:**

a. Đk:  $x \geq -7$

$$x^2 + 4x - 3 + 2x\sqrt{x+7} + 3\sqrt{x+7} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x+7} + x + 7 + 3x + 3\sqrt{x+7} - 10 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+7})^2 + 3(x + \sqrt{x+7}) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x + \sqrt{x+7} = 2; x + \sqrt{x+7} = -5$$

$$\text{TH1: } x + \sqrt{x+7} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x + 7 = 4 - 4x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$$

$$\text{TH2: } x + \sqrt{x+7} = -5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5 - x \geq 0 \\ x + 7 = 25 + 10x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq x \leq -5 \\ x^2 + 9x + 18 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -6$$

KL: Vậy nghiệm của PT là:  $x = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}; x = -6$ .

$$b. \begin{cases} x(3x+1) = y(-2y+7x+2) & (1) \\ x^2 + 3xy - 4y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 3x^2 + x + 2y^2 - 7xy - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)(3x - y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

TH1: Thay  $x = 2y$  vào (2) ta được:  
 $10y^2 - 4y + 3 = 0$  (VN)

TH2: Thay  $y = 3x + 1$  vào (2) ta được  
 $10x^2 - 9x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = \frac{7}{10} \end{cases}$$

Vậy HPT có nghiệm là:  $(1; 4); (\frac{-1}{10}; \frac{7}{10})$ .

**2. Cho parabol (P):  $y = x^2$  và đường thẳng (d):  $y = x - 3$ . Tìm trên parabol (P) hai điểm A và B sao cho  $AB = 3\sqrt{2}$  và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng (d), biết rằng điểm A có hoành độ âm.**

Phương trình đường thẳng AB có dạng:  $y = -x + b$ ,

Hoành độ điểm A, B là nghiệm của phương trình:  $x^2 + x - b = 0$  (1), do  $AB = 3\sqrt{2}$  nên A, B là hai điểm phân biệt  $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta = 1 - 4b > 0 \Leftrightarrow b < \frac{1}{4}$

Theo Viet ta có:  $x_1 + x_2 = -1; x_1 x_2 = -b$

Khi đó điểm  $A(x_1; -x_1 + b); B(x_2; -x_2 + b)$

$$AB = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 18 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 1 + 4b = 9$$

$$\Leftrightarrow b = 2(TM)$$

Khi  $b = 2$  PT (1) có nghiệm  $x = 1; x = -2$

$x = 1$  suy ra  $y = 1$

$x = -2$  suy ra  $y = 4$

Vì điểm A có hoành độ âm nên  $A(-2; 4); B(1; 1)$ .

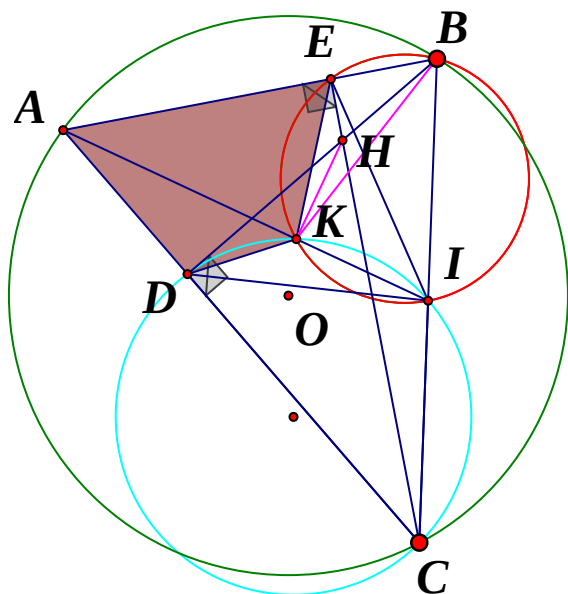
**Bài 3. ( 5.0 điểm):**

Cho đường tròn  $(O; R)$ , dây BC cố định và  $BC = R\sqrt{3}$ . Trên cung lớn BC của  $(O)$  lấy điểm A bất kỳ (A khác điểm chính giữa của cung lớn BC). Gọi I là trung điểm của BC, H là giao điểm của hai đường cao BD và CE trong tam giác ABC. Hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BEI và tam giác CDI cắt nhau tại K

a. CM: Tứ giác AEKD nội tiếp và 3 điểm A, K, I thẳng hàng

b. CM:  $HK \perp AI$  và tia KH là tia phân giác của góc BKE

c. CM:  $AD.HE + AE.HD$  có giá trị không đổi khi A di chuyển trên cung lớn BC.



HD:

a) CM: Tứ giác AEKD nội tiếp và 3 điểm A, K, I thẳng hàng

\*) Ta có tứ giác BEKI và DKIC nội tiếp đường tròn nên:

$$\widehat{AEK} = \widehat{BIK}; \widehat{ADK} = \widehat{CIK}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEK} + \widehat{ADK} = \widehat{BIK} + \widehat{CIK} = 180^\circ$$

Hay tứ giác AEKD nội tiếp đường tròn

\*) Tứ giác AEKD nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AKE} \text{ ( Gốc nt cùng chắn cung AE)}$$

Tứ giác BEDC nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ABC} \text{ ( cùng bù với góc EBC)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AKE} = \widehat{ABC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AKI} = \widehat{AKE} + \widehat{EKI} = \widehat{ABC} + \widehat{EKI} = 180^\circ$$

Hay 3 điểm A, K, I thẳng hàng

**b. CM:**  $HK \perp AI$  và tia KH là tia phân giác của góc BKE

Ta có tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH

Suy ra 5 điểm A, E, H, K, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH

$$\text{Hay } \widehat{AKH} = 90^\circ$$

Suy ra  $HK \perp AI$ .

$$\widehat{BKI} = \widehat{BEI}$$

$$\widehat{BEI} = \widehat{EBI}$$

$$\Rightarrow \widehat{AKE} = \widehat{BKI}$$

Mà  $HK \perp AI$

Suy ra tia KH là tia phân giác của góc BKE

**c. CM:**  $AD.HE + AE.HD$  có giá trị không đổi khi A di chuyển trên cung lớn BC.

Kẻ đường kính AJ của (O), đường cao AF của tam giác ABC.

Ta có

$$BC = R\sqrt{3} \Rightarrow BI = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OI = \frac{R}{2}$$

$$+) \cos \widehat{BOI} = \frac{OI}{OB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BOI} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$$

Suy ra

$$\widehat{HBE} = 30^\circ \Rightarrow BH = 2HE.$$

$$+) BH \parallel CJ, CH \parallel BH$$

Nên tứ giác BHCH là hình bình hành

Suy ra: I là trung điểm của HJ  $\Rightarrow AH = 2OI = R$

$$\text{Mặt khác: } \triangle AHD \sim \triangle BHF \Rightarrow \frac{AD}{BF} = \frac{AH}{BH} = \frac{R}{2HE} \Rightarrow AD.HE = \frac{R}{2}.BF$$

$$\text{Tương tự: } AE.HD = \frac{R}{2}.CF$$

$$\text{Suy ra: } AD.HE + AE.HD = \frac{R}{2}(BF + CF) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} \text{ không đổi.}$$

**Vậy  $AD.HE + AE.HD$  có giá trị không đổi khi A di chuyển trên cung lớn BC.**

**Bài 4. ( 2.0 điểm):**

Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, AB, AC theo thứ tự lấy ba điểm M, N, P sao cho N khác A và B và  $\widehat{MNP} = 60^\circ$ . CMR:  $AB \geq 2\sqrt{AP.BM}$ . Dấu “=” xảy ra khi nào?

Tam giác BMN có:

$$\widehat{BMN} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{BNM} = 120^\circ - \widehat{BNM}$$

Mà:

$$\widehat{ANP} = 180^\circ - \widehat{MNP} - \widehat{BNM} = 120^\circ - \widehat{BNM}$$

$$\Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{ANP}$$

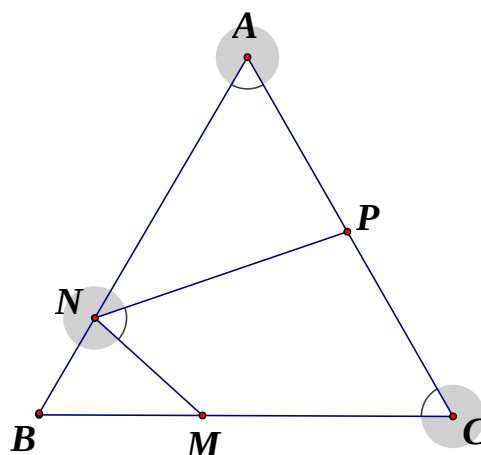
$$\Rightarrow \triangle ANP \sim \triangle BMN \text{ (gg)}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AP}{BN} \Rightarrow AN \cdot BN = AP \cdot BM$$

$$\text{Mà: } AN \cdot BN \leq \left( \frac{AN + BN}{2} \right)^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow AB \geq 2\sqrt{AP \cdot BM}$$

Dấu “=” xảy ra khi N là trung điểm của AB



### Bài 5. ( 3.0 điểm):

1. Cho  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn :  $x + y + z = 1$ . CMR:

$$\frac{x}{x + \sqrt{x + yz}} + \frac{y}{y + \sqrt{y + yz}} + \frac{z}{z + \sqrt{z + xy}} \leq 1.$$

HD:

Với  $x, y, z$  dương ta có

$$\begin{aligned} \frac{x}{x + \sqrt{x + yz}} &= \frac{x(\sqrt{x + yz} - x)}{x + yz - x^2} = \frac{x(\sqrt{x(x + y + z) + yz} - x)}{x(x + y + z) + yz - x^2} = \frac{x(\sqrt{(x + y)(x + z)} - x)}{xy + xz + yz} \\ &\leq \frac{x\left(\frac{x + y + x + z}{2} - x\right)}{xy + xz + yz} = \frac{1}{2} \frac{xy + xz}{xy + xz + yz} \end{aligned}$$

Tương tự ta có :

$$VT \leq \frac{1}{2} \left( \frac{xy + xz}{xy + xz + yz} + \frac{yz + yx}{xy + xz + yz} + \frac{zx + zy}{xy + xz + yz} \right) = 1$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x = y = z = \frac{1}{3}$ .

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn phương trình:

$$(x - 2022)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$$

Giải:

$$(x - 2022)^2 = y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y$$

$$\Leftrightarrow (x - 2022)^2 = y(y - 1)(y - 2)(y - 3)$$

Ta có  $y(y - 1)(y - 2)(y - 3) + 1 = (y^2 - 3y + 1)^2$  (Áp dụng kết quả lớp 8 tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 là 1 số chính phương)

$$\text{Đặt } (y^2 - 3y + 1)^2 = A^2 \Rightarrow y(y - 1)(y - 2)(y - 3) = A^2 - 1; A \geq 0$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$A^2 - (x - 2022)^2 = 1 \Rightarrow A = 1; x = 2022$$

Hay  $y(y-1)(y-2)(y-3) = 0 \Rightarrow y = 1$ ; hoặc  $y = 2$  hoặc  $y = 3$  (do  $y$  nguyên dương)

Vậy các cặp số nguyên dương  $(x; y)$  thỏa mãn phương trình là  
 $(2022; 1); (2022; 2); (2022; 3)$ .