

SỞ GD&ĐT SƠN LA

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020 - 2021

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán

Ngày thi: 14/3/2021

(Đề thi có 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$

với ($x \geq 0; x \neq 9$)

a) Tính giá trị của B tại $x = \frac{2}{5(45-\sqrt{2021})} + \frac{2}{5(45+\sqrt{2021})}$

b) Rút gọn A.

c) Tìm tất cả các số nguyên x để $P = A.B$ nhận giá trị nguyên

Câu 2 (4,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = (2m+1)x - 2m$ và Parabol (P): $y = x^2$ (m là tham số)

a) Tìm tọa độ các giao điểm của (d) và (P) khi $m = 2$.

b) Tìm m để (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $E = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 \end{cases}$$

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0$

Câu 4 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC có góc A tù. Vẽ đường tròn (O) đường kính AB và đường tròn (O') đường kính AC. Đường thẳng AB cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai là D, đường thẳng AC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi F là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O) và (O') (F khác A). Chứng minh ba điểm B, F, C thẳng hàng và FA là phân giác của góc EFD.

c) Gọi H là giao điểm của AB và EF. Chứng minh $BH.AD = AH.BD$

Câu 5 (2,0 điểm). Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $P = \frac{b^2c^2}{a(b^2+c^2)} + \frac{c^2a^2}{b(c^2+a^2)} + \frac{a^2b^2}{c(a^2+b^2)}$

-----Hết-----

Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – SƠN LA (2020 – 2021)

Câu 1.

a) Ta có:

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{5(45 - \sqrt{2021})} + \frac{2}{5(45 + \sqrt{2021})} \\&= \frac{2(5 + \sqrt{2021}) + 2(45 - \sqrt{2021})}{5(45 - \sqrt{2021})(45 + \sqrt{2021})} \\&= 9\end{aligned}$$

Thay $x = 9$ vào biểu thức B ta được: $B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{9} - 3}{\sqrt{9} + 1} = 0$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}A &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} + \frac{3 - 11\sqrt{x}}{9 - x} \\&= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3) + 11\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \\&= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} + \sqrt{x} + 3 + 11\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \\&= \frac{3x + 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \\&(\text{với } x \geq 0, x \neq 9)\end{aligned}$$

$$\text{c) Ta có: } P = A.B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$$

$$P \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \text{ là số nguyên} \Leftrightarrow 3 : (\sqrt{x} + 1)$$

$$\text{Hay } (\sqrt{x} + 1) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$$

Câu 2.

a) Khi $m = 2$ đường thẳng (d) có dạng: $y = 5x + 4$

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = 5x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = 1, x = 4 \Rightarrow y = 16$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là: $(1; 1); (4; 16)$

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = (2m + 1)x - 2m \Leftrightarrow x^2 - (2m + 1)x + 2m = 0$$

$$\Delta = (2m-1)^2$$

+ (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt khi: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$

+ Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } E = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (2m+1)^2 - 3 \cdot 2m = 4m^2 - 2m + 1$$

$$= \left(2m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \text{ Với mọi } m \in \mathbb{R}$$

Min E = 3/4 khi m = 1/4

Câu 3.

$$\text{a) Ta có: } \begin{cases} y^2 - 2xy = 8x^2 - 6x + 1 & (1) \\ y^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1 & (2) \end{cases}$$

Cộng 2 vế của phương trình (1) với x^2 ta được:

$$y^2 - 2xy + x^2 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 = (3x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-y-3x+1)(x-y+3x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x-y)(4x-y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x-y=0 \\ 4x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ y=4x-1 \end{cases}$$

+ Trường hợp 1: $y = 1-2x$ thế vào phương trình (2) ta được

$$(1-2x)^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Tìm được nghiệm (x;y) là (0;1), (-1;3), (-3;7)

+ Trường hợp 2: $y = 4x-1$ thế vào phương trình (2) ta được

$$(4x-1)^2 = x^3 + 8x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 7 \end{cases}$$

Tìm được nghiệm (x;y) là (0;-1), (1;3), (7;27)

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là: $S = \{(0;1), (-1;3), (-3;7), (0;-1), (1;3), (7;27)\}$

b) Biến đổi phương trình:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2xy + y^2) + y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (y-1)(y+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(y+4) = -(x+y)^2 \leq 0$$

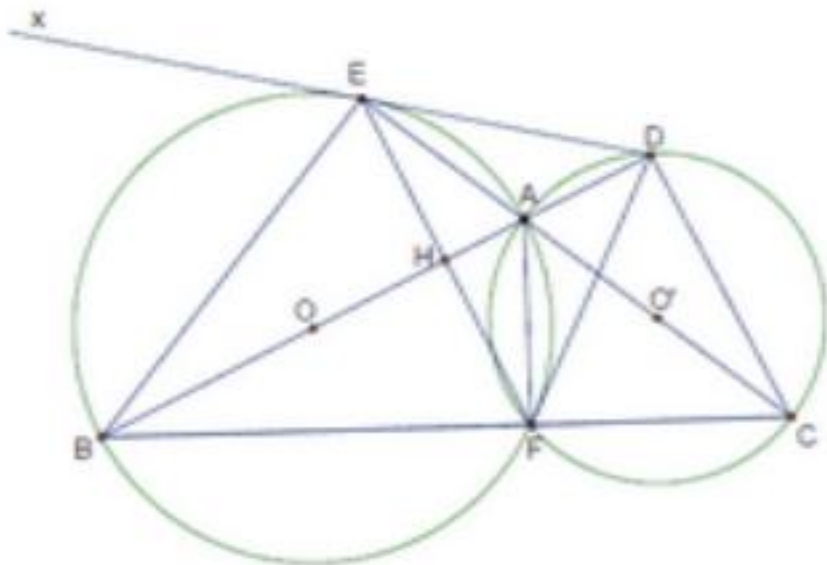
$$\Rightarrow -4 \leq y \leq 1$$

Vì y nguyên nên $y \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1\}$

Suy ra các cặp $(x; y)$ nguyên thỏa mãn phương trình là:

$$(4;-4);(-1;1);(5;-3);(1;-3);(2;0);(-2;0)$$

Câu 4.



a) Dễ dàng suy ra: $\widehat{AEB} = 90^0$ và $\widehat{ADC} = 90^0$

Suy ra bốn điểm B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC.

b) Có $\widehat{AFB} = \widehat{AFC} = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra $\widehat{AFB} + \widehat{AFC} = 180^\circ$

Suy ra ba điểm B, F, C thẳng hàng

$$\widehat{AFE} = \widehat{ABE} \text{ (Cùng chắn } \widehat{AE}) \text{ và } \widehat{AFD} = \widehat{ACD} \text{ (Cùng chắn } \widehat{AD})$$

Mà $\widehat{ECD} = \widehat{EBD}$ (cùng chắn $\widehat{DE}$ của tứ giác BCDE nội tiếp)

Suy ra: $\widehat{AFE} = \widehat{AFD}$, do đó FA là phân giác của góc $\widehat{EFD}$

Để dàng chứng minh được EA là phân giác của tam giác DHE và suy ra $\frac{AH}{AD} = \frac{EH}{ED}$ (1)

Xét tam giác HED có EA là phân giác trong của tam giác. Mặt khác $BE \perp EA$ nên BE là phân giác ngoài của tam giác HED

EB là phân giác ngoài của tam giác DHE suy ra $\frac{BH}{BD} = \frac{EH}{ED}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{AH}{AD} = \frac{BH}{BD} \Leftrightarrow AH \cdot BD = BH \cdot AD$

Câu 5.

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{a(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2})} + \frac{1}{b(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2})} + \frac{1}{c(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})}$$

Đặt $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$ thì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và $0 < x, y, z < 1$

$$P = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x(1-x^2)} + \frac{y^2}{y(1-y^2)} + \frac{z^2}{z(1-z^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:

$$x^2(1-x^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2x^2(1-x^2)(1-x^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$$

$$\Rightarrow x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(1-x^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y^2}{y(1-y^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2, \quad \frac{z^2}{z(1-z^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = b = c = \sqrt{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$