

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 14/3/2021

Bài 1. (4.0 điểm) a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}-x-1} \right) : \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức P

b) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Bài 2. (4.0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 3y^2 + x = 3 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

b) Giải phương trình $x^2 - \frac{4}{x} - 4x + \frac{8}{x} = 9$

Bài 3. (2.0 điểm)

Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_1^2 = x_2^3 - x_2^2$.

Bài 4. (2.5 điểm)

a) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 14. Chứng minh rằng tích abc cũng chia hết cho 14.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.

Bài 5. (3.0 điểm)

Cho đường tròn (O;R) và M là trung điểm của dây AB của đường tròn ($AB < 2R$). Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AD=AM$. Vẽ dây AC với C là điểm thuộc cung lớn AB. Trên đoạn thẳng AC lấy hai điểm G và Q sao cho $AG=GQ=QC$. Gọi N là giao điểm của BQ và CM.

a) Chứng minh rằng ba điểm D, G, N thẳng hàng.

b) Gọi P là giao điểm của MG và CD. Biết $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Chứng minh tứ giác PGNQ là hình thoi.

Bài 6. (2.5 điểm)

Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B nằm trên đường tròn sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Điểm C nằm trên cung lớn AB sao cho $AC > BC$ và tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AI, BK của tam giác ABC cắt nhau ở H. BK cắt (O) ở N (N khác điểm B), AI cắt (O) ở M (M khác điểm A), hai đường thẳng NA và MB cắt nhau ở D. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AHBD nội tiếp được đường tròn.

b) OC song song với DH.

Bài 7. (2.0 điểm)

Cho bốn số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a+b=4ab$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$

b) $\frac{a}{4b^2+1} + \frac{b}{4a^2+1} \geq \frac{1}{2}$

---HẾT---

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Bài 1.

$$\begin{aligned} \text{a) P tương đương: } P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \right) : \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+1} \\ &= \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x+1}{x-2\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

$$\text{b) } A = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} + \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$$

$$A = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

$$A = 2\sqrt{5}$$

Bài 2.

a) Phương trình thứ hai tương đương:

$$(x^2 - y^2) + y(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \end{cases} \text{ Với } x=y, \text{ thay vào phương trình thứ nhất}$$

của hệ ta được: $x = -1$ hoặc $x = 3/4$

Với $x = -2y$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta được:

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 3 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(x; y) = (-1; -1) = (\frac{3}{4}; \frac{3}{4}) = (2; -1) = (-6; 3)$

b) Điều kiện: $x \neq 0$

$$\text{Phương trình tương đương với: } x^2 - 4 + \frac{4}{x^2} - 4(x - \frac{2}{x}) + 4 = 9 \Leftrightarrow (x - \frac{2}{x})^2 - 4(x - \frac{2}{x}) - 5 = 0$$

$$\text{Đặt } x - \frac{2}{x} = t, \text{ phương trình trở thành: } t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$\text{Với } t=5, \text{ thay vào ta tìm được: } x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\text{Với } t=-1, \text{ thay vào ta tìm được: } x=-2, x=1$$

$$\text{Vậy phương trình có 4 nghiệm: } x = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}, x=-2, x=1$$

Bài 3.

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là: $\Delta' = (m-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng). Do đó phương trình luôn có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\text{Ta có: } x_1^3 - x_1^2 = x_2^3 - x_2^2$$

$$\Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 - x_1^2 + x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } x_1 = x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 2(m+1) \\ x_1^2 = 4m \end{cases} \Rightarrow m = 1$$

$$\text{TH2: } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - x_1 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow [2(m+1)]^2 - 4m - 2(m+1) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m + 2 = 0 \text{ (Vô nghiệm)}$$

Vậy $m=1$

Bài 4.

a) Nhận xét: Với x nguyên dương ta có $x^3 \equiv 0, 1 \pmod{2}$ và $x^3 \equiv -1, 0, 1 \pmod{7}$

Nếu cả ba số a, b, c đều không chia hết cho 2 thì $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 1 \pmod{2}$

Điều này trái với giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 : 14$, do đó phải có một số chia hết cho 2 hay $abc : 2$

Nếu cả ba số a, b, c đều không chia hết cho 7 thì $a^3 + b^3 + c^3 \equiv -3, -1, 1, 3 \pmod{7}$

Điều này trái với giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 : 14$, do đó phải có một số chia hết cho 7 hay $abc : 7$

Vậy abc chia hết cho 14

b) Ta có: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x(y-1) + (y-1)^2 - (4y^2 + 8y + 4) = 7$$

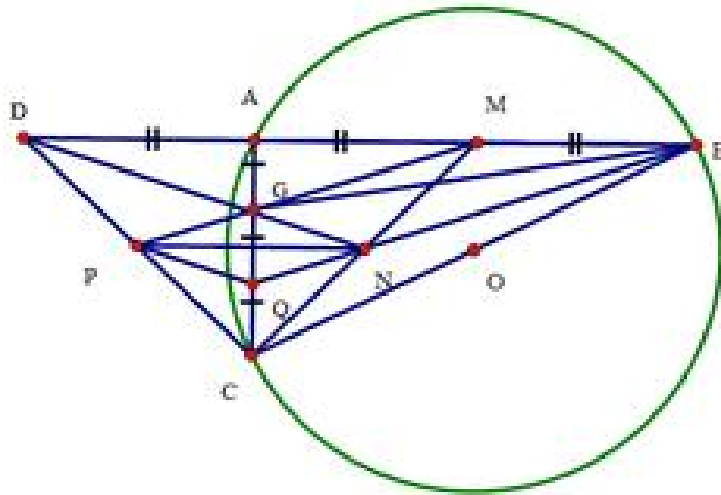
$$\Leftrightarrow (3y + x + 1)(y - x + 3) = 7$$

Vì 7 là số nguyên tố nên ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} 3y + x + 1 = 7 \\ y - x + 3 = 1 \end{cases}; \begin{cases} 3y + x + 1 = -7 \\ y - x + 3 = -1 \end{cases}; \begin{cases} 3y + x + 1 = 1 \\ y - x + 3 = 7 \end{cases}; \begin{cases} 3y + x + 1 = -1 \\ y - x + 3 = -7 \end{cases}$$

Kết luận: $(x; y) = (\pm 3; 1) = (1; -3) = (7; -3)$

Bài 5.



a) Hướng dẫn:

- Chứng minh G là trọng tâm của tam giác MCD .

- Chứng minh $NC = NQ$.

Suy ra DN là trung tuyến của tam giác MCD

Suy ra D, G, N thẳng hàng.

b) Hướng dẫn:

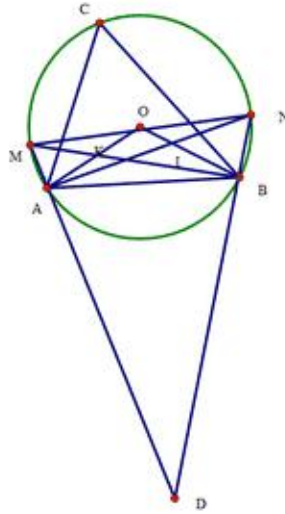
- Chứng minh tam giác MCD cân tại C .

- Chứng minh P là trung điểm của DC .

- Chứng minh 2 đường chéo của tứ giác $PGNQ$ là đường trung trực của nhau.

Suy ra tứ giác PGNQ là hình thoi.

Bài 6.



a) Có $HK \perp KC, HI \perp IC \Rightarrow \widehat{HKC} + \widehat{HIC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Tứ giác AHBD nội tiếp được đường tròn

b) Dễ dàng chứng minh được MN là đường kính của (O) $\Rightarrow MA \perp DN, NB \perp DN$

Do đó H là trực tâm $\triangle DMN$ hay $DH \perp MN$

Do I, K cùng nhìn AB dưới góc 45° nên tứ giác ABIK nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CAI} = \widehat{CBK}$

Do đó C là điểm chính giữa của cung MN

$\Rightarrow CO \perp MN$

Vì $AC > BC$ nên tam giác ABC không cân tại C

Vậy $CO \parallel DH$

Bài 7.

a) Ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2y + b^2x}{xy} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2xy + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2xy \geq a^2xy + 2abxy + b^2xy$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 \geq 2abxy$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0$$

$$\text{b) Ta có: } 4ab = a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \geq \frac{1}{4}$$

Áp dụng phần a) ta có:

$$\frac{a}{4b^2 + 1} + \frac{b}{4a^2 + 1} = \frac{a^2}{4ab^2 + a} + \frac{b^2}{4ba^2 + b} \geq \frac{(a+b)^2}{4ab(a+b) + (a+b)} = 1 - \frac{1}{4ab+1} \geq \frac{1}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi: $a = b = \frac{1}{2}$