

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2024-2025**

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang, thí sinh không phải chép đề vào giấy thi)

Câu 1:

a) (2,0 điểm). Chứng minh $2n^3 + 3n^2 + 25n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n .

b) (2,0 điểm). Cho $u_n = 12\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} + 23$ với n nguyên dương.

Chứng minh u_n là tổng các bình phương của ba số nguyên dương lẻ liên tiếp.

Câu 2:

a) (2,0 điểm). Giải phương trình $3\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2} = 4$.

b) (2,0 điểm). Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-3)x - m + 5$.

Tìm các giá trị nguyên của tham số m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tọa độ của A, B là các số nguyên.

Câu 3: (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc = 8$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{8a+b^4+c^4} + \frac{1}{a^4+8b+c^4} + \frac{1}{a^4+b^4+8c} \leq \frac{1}{16}.$$

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC , M là trung điểm BC .

a) (4,0 điểm). Chứng minh $\frac{AB}{HC} = \frac{HB}{AE}$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.

b) (2,0 điểm). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE . Chứng minh $AH = 2IM$.

Câu 5: (2,0 điểm) Một miếng tôn hình tam giác có diện tích là S . Người thợ làm biển quảng cáo muốn cắt ra một hình bình hành (một đỉnh là đỉnh của tam giác và ba đỉnh còn lại nằm trên ba cạnh tam giác). Hỏi hình bình hành mà người thợ cắt ra có thể đạt diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 6: (2,0 điểm) Trong đợt cắm trại chào mừng ngày thành lập Đoàn 26/3 có 20 bạn mang số áo từ 1 đến 20 nắm tay nhau tạo thành một vòng tròn để tham gia các trò chơi tập thể. Chứng minh luôn tìm được 5 bạn đứng liên kề với nhau mà tổng các số áo của họ lớn hơn 52.

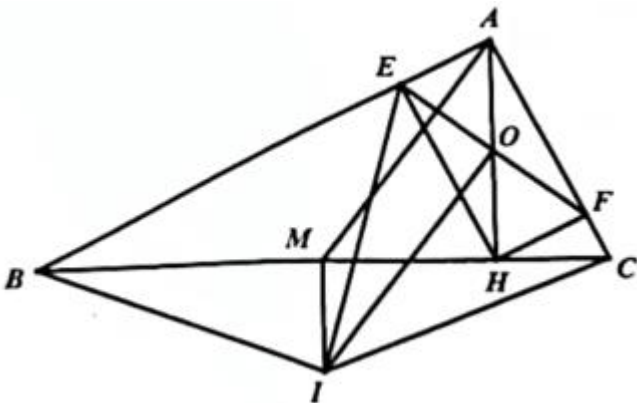
---Hết---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TÂY NINH
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS VÒNG TỈNH
NĂM HỌC 2024-2025
HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN: TOÁN

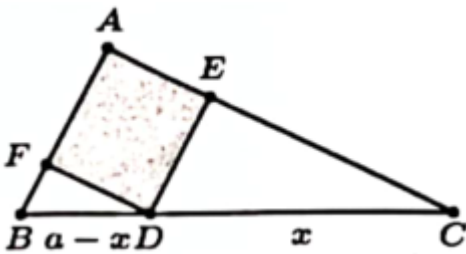
ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu	Nội dung cần đạt	Điểm
1	a) Chứng minh $2n^3 + 3n^2 + 25n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n .	2,0
	• $2n^3 + 3n^2 + 25n = 2n^3 + 3n^2 + n + 24n = n(n+1)(2n+1) + 24n$	0,25
	• Ta có: $24n : 6$	0,25
	• Đặt $A = n(n+1)(2n+1)$. Ta có: $n(n+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 $\Rightarrow A : 2$	0,25
	+ Nếu n chia hết cho 3 thì $A : 3$	0,25
	+ Nếu n chia 3 dư 1 thì $(2n+1) : 3 \Rightarrow A : 3$	0,25
	+ Nếu n chia 3 dư 2 thì $(n+1) : 3 \Rightarrow A :$	0,25
	$\Rightarrow A : 3, \forall n$. Mà $(2; 3) = 1 \Rightarrow A : 6, \forall n$	0,25
	Từ (1), (2) suy ra $2n^3 + 3n^2 + 25n$ chia hết cho 6 với mọi số tự nhiên n .	0,25
	b) Cho $u_n = 12\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} + 23$ với n nguyên dương. Chứng minh u_n là tổng các bình phương của ba số nguyên dương lẻ liên tiếp.	2,0
	$u_n = 12\sqrt{(n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1} + 23$	0,25
	$= 12\sqrt{(n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1} + 23$	0,25
	$= 12\sqrt{(n^2 + 3n + 1)^2} + 23$	0,25
	$= 12(n^2 + 3n + 1) + 23$	0,25
	$= (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2$	0,75
	• Do $2n+1, 2n+3, 2n+5$ là các số nguyên dương lẻ liên tiếp nên ta có điều phải chứng minh.	0,25

2	a) Giải phương trình $3\sqrt[3]{x+6} - \sqrt{x+2} = 4$.	2,0
	• Điều kiện: $x \geq -2$	0,25
	• Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{x+6} = a, a > 0 \\ \sqrt{x+2} = b, b \geq 0 \end{cases}$	0,25
	Suy ra $\begin{cases} x = a^3 - 6 \\ x = b^2 - 2 \end{cases}$	0,25
	• Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3a - b = 4 & (1) \\ a^3 - b^2 = 4 & (2) \end{cases}$	0,25
	Từ (1), (2) ta có $a^3 - 9a^2 + 24a - 20 = 0$	0,25
	• Giải phương trình trên tìm được $a = 5, a = 2$.	0,25
	• Với $a = 5$ tìm được $x = 119$ (thỏa điều kiện)	0,25
	• Với $a = 2$ tìm được $x = 2$ (thỏa điều kiện) Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 119, x = 2$	0,25
	b) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2(m-3)x - m + 5$. Tìm các giá trị nguyên của tham số m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tọa độ của A, B là các số nguyên.	2,0
	• Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $x^2 = 2(m-3)x - m + 5 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-3)x + m - 5 = 0 \quad (1)$	0,25
	• (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 7m + 14 > 0 \quad (*)$	0,25
	• Do tọa độ của A, B là các số nguyên nên (1) có hai nghiệm phân biệt đều nguyên. Suy ra $\Delta' = k^2 \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow m^2 - 7m + 14 = k^2$	0,25
	$\Leftrightarrow 4(m^2 - 7m + 14) = 4k^2 \Leftrightarrow (2m - 7 - 2k)(2m - 7 + 2k) = -7$	0,25
	• Từ (1) ta có 4 trường hợp +Trường hợp 1: $\begin{cases} 2m - 7 - 2k = -1 \\ 2m - 7 + 2k = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ k = 2 \end{cases}$ (thỏa $(*)$ và $m \in \mathbb{Z}$)	0,25
	+Trường hợp 2: $\begin{cases} 2m - 7 - 2k = 1 \\ 2m - 7 + 2k = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ k = -2 \end{cases}$ (thỏa $(*)$ và $m \in \mathbb{Z}$)	0,25

	+Trường hợp 3: $\begin{cases} 2m-7-2k=7 \\ 2m-7+2k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ k=-2 \end{cases}$ (thỏa (*) và $m \in \mathbb{Z}$)	0,25
	+Trường hợp 4: $\begin{cases} 2m-7-2k=-7 \\ 2m-7+2k=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ k=2 \end{cases}$ (thỏa (*) và $m \in \mathbb{Z}$) Vậy $m=5, m=2$ là các giá trị cần tìm.	0,25
3	Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $abc=8$. Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{8a+b^4+c^4} + \frac{1}{a^4+8b+c^4} + \frac{1}{a^4+b^4+8c} \leq \frac{1}{16}.$	2,0
	• Ta có $b^4+c^4 \geq bc(b^2+c^2)$	0,25
	Thật vậy (1) $\Leftrightarrow b^3(b-c)+c^3(c-b) \geq 0 \Leftrightarrow (b-c)(b^3-c^3) \geq 0$ $\Leftrightarrow (b-c)^2(b^2+bc+c^2) \geq 0$ (đúng), đẳng thức xảy ra khi $b=c$	0,25
	Vậy $b^4+c^4 \geq bc(b^2+c^2) \Rightarrow b^4+c^4 \geq \frac{8}{a}(b^2+c^2)$ $\Rightarrow 8a+b^4+c^4 \geq 8a+\frac{8}{a}(b^2+c^2) = \frac{8(a^2+b^2+c^2)}{a}$	0,25
4	Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC, M là trung điểm BC. a) (4,0 điểm). Chứng minh $\frac{AB}{HC} = \frac{HB}{AE}$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp. b) (2,0 điểm). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE. Chứng minh $AH = 2IM$.	6,0
	 Gọi O là giao điểm AH và EF	

a) Chứng minh $\frac{AB}{HC} = \frac{HB}{AE}$ và tứ giác $BEFC$ nội tiếp.	4,0
• AH là đường cao tam giác vuông ABC nên: $AH^2 = HB.HC$	0,5
• HE là đường cao tam giác vuông ABH nên: $AH^2 = AB.AE$	0,5
$\Rightarrow AB.AE = HB.HC$	0,5
Suy ra $\frac{AB}{HC} = \frac{HB}{AE}$.	0,5
Từ giả thiết suy ra $AEHF$ là hình chữ nhật	0,25
• $\triangle OAE$ cân tại O nên $OEA = OAE$	0,5
• Mà $OAE = HCF$ (cùng phụ HAC)	0,5
$\Rightarrow OEA = HCF$	0,25
$\Rightarrow BEF + HCF = BEF + OEA = 180^\circ$	0,25
Suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp.	0,25
b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE . Chứng minh $AH = 2IM$.	2,0
• Do tứ giác $BEFC$ nội tiếp nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cũng là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BEFC$ do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp $BEFC$	0,25
$\Rightarrow IM \perp BC(1); IO \perp EF$	0,25
• Mà $AH \perp BC$	0,25
Từ (1) và (3) $\Rightarrow IM \parallel AH$ hay $IM \parallel OA(*)$	0,25
• M là trung điểm cạnh huyền BC của $\triangle ABC$ vuông tại A nên tam giác $\triangle MAB$ cân tại $M \Rightarrow MAB = MBA$	0,25

	• $OEA = HCF$ (cmt) $\Rightarrow MAB + OEA = MBA + HCF = 90^\circ$	0,25
	$\Rightarrow MA \perp EF$ (4). Từ (2) và (4) $\Rightarrow MA // IO$ (**)	0,25
	• Từ (*) và (**) suy ra AMO là hình bình hành $\Rightarrow IM = AO = \frac{1}{2}AH$ hay $AH = 2IM$	0,25
5	Một miếng tôn hình tam giác có diện tích là S. Người thợ làm biển quảng cáo muốn cắt ra một hình bình hành (một đỉnh là đỉnh của tam giác và ba đỉnh còn lại nằm trên ba cạnh tam giác). Hỏi hình bình hành mà người thợ cắt ra có thể đạt diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?	2,0
	 Giả sử tam giác đã cho là ABC và độ dài đoạn thẳng BC là a và CD là x với $0 < x < a$	
	• $DE // AB \Rightarrow \triangle CDE \sim \triangle CBA$	0,25
	$\Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{CBA}} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow S_{CDE} = \frac{x^2}{a^2} S$	0,25
	• $DF // AB \Rightarrow \triangle BDF \sim \triangle BCA$	0,25
	$\Rightarrow \frac{S_{BDF}}{S_{BCA}} = \frac{(a-x)^2}{a^2} \Rightarrow S_{BDF} = \frac{(a-x)^2}{a^2} S$	0,25
	Suy ra $S_{AEDF} = S_{ABC} - S_{BDF} - S_{CDE} = S - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{(a-x)^2}{a^2} \right) S$	0,25
	• Do đó S_{AEDF} lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(a-x)^2}{a^2}$ nhỏ nhất	0,25

	• $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(a-x)^2}{a^2} = \frac{2x^2 - 2ax + a^2}{a^2} = \frac{4x^2 - 4ax + 2a^2}{2a^2} = \frac{(2x-a)^2 + a^2}{2a^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(2x-a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$	0,25
	• S_{AEDF} lớn nhất bằng $\frac{S}{2}$	0,25
6	Trong đợt cắm trại chào mừng ngày thành lập Đoàn 26/3 có 20 bạn mang số áo từ 1 đến 20 nắm tay nhau tạo thành một vòng tròn để tham gia các trò chơi tập thể. Chứng minh luôn tìm được 5 bạn đứng liền kề với nhau mà tổng các số áo của họ lớn hơn 52.	2,0
	• Ký hiệu 20 bạn đứng thành vòng tròn theo thứ tự liền kề nhau là $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{20}$. Giả sử không có 5 bạn nào đứng liền kề mà tổng các số áo của họ lớn hơn 52 khi đó ta có:	0,25
	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 52$ $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 52$ $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 52$ $a_{20} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 52$	0,5
	$\Rightarrow 5(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{20}) \leq 20.52 = 1040$	0,5
	• Mà $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{20} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 20 = 210$	0,25
	Suy ra $5.210 \leq 1040 \Leftrightarrow 1050 \leq 1040$ vô lý	0,25
	• Do đó điều giả sử là sai. Vậy luôn tìm được 5 bạn đứng tổng các số áo của họ lớn hơn 52	0,25

--Hết--