

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Ngày thi: 24 tháng 3 năm 2022

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài I. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$.

2) Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a^2 + ab = c^2 + bc$ và $a^2 + ac = b^2 + bc$.

Tính giá trị của biểu thức $K = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$.

Bài II. (5,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số tự nhiên m, n thỏa mãn $3^m + 2022 = n^2$.

2) Tìm tất cả số nguyên tố p để phương trình $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = p$ có nghiệm nguyên dương.

Bài III. (2,0 điểm)

Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$.

Bài IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại trực tâm H . Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với hai đường thẳng AH, AO .

1) Chứng minh $\widehat{AQE} = 90^\circ$.

2) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh $IE^2 = IK \cdot ID$.

3) Gọi R, J lần lượt là trung điểm của BE, CF . Chứng minh JR vuông góc với QD .

Bài V. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên a, b sao cho số $(a^3 + b)(b^3 + a)$ là lập phương của một số nguyên tố.

2) Trên bảng ta viết số tự nhiên 222...2 gồm 2022 chữ số 2. Mỗi bước ta chọn 22 chữ số liên tiếp nào đó có chữ số ngoài cùng bên trái bằng 2, rồi biến đổi các chữ số được chọn theo qui tắc: chữ số 2 đổi thành chữ số 0 còn chữ số 0 đổi thành chữ số 2.

a) Chứng minh mọi cách thực hiện đều phải dừng lại sau một số hữu hạn bước.

b) Giả sử sau khi thực hiện được n bước thì không thể thực hiện được thêm bước nào nữa. Chứng minh n là số lẻ.

----- Hết -----

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh : Số báo danh :

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP THÀNH PHỐ
HÀ NỘI**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Năm học 2021 – 2022

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 24 tháng 3 năm 2022

CÂU	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
I	1	<i>Giải phương trình</i> $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$. (2,5 điểm)	
		Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{1}{3}$.	0,5
		Phương trình đã cho đưa về $(x+7-4\sqrt{x+3}) + (3x+5-4\sqrt{3x+1}) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)^2 + (\sqrt{3x+1}-2)^2 = 0$	0,5
		Lập luận để dẫn tới $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3x+1} = 2 \end{cases}$	0,5
		$\Leftrightarrow x = 1$. Kết hợp điều kiện xác định: phương trình có nghiệm là $x = 1$.	0,5
	2	<i>Tính giá trị của biểu thức</i> $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right)$. (2,5 điểm)	
		Từ giả thiết suy ra $a(a+b) = c(b+c); a(a+c) = b(b+c) \Rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$.	0,5
		TH1: $a+b+c = 0$ suy ra $a+b = -c; b+c = -a; c+a = -b$.	0,5
		Do đó $1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} = \frac{-c}{b}; 1 + \frac{b}{c} = \frac{-a}{c}; 1 + \frac{c}{a} = \frac{-b}{a}$. Suy ra $P = \frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a} = -1$.	0,5
		TH2: $a+b+c \neq 0 \Rightarrow \frac{b+c}{a} + 1 = \frac{c+a}{b} + 1 = \frac{a+b}{c} + 1 \Rightarrow \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c} \Rightarrow a=b=c$.	0,5
		Suy ra $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) = 8$.	0,5
II	1	<i>Tìm tất cả các số tự nhiên</i> m, n sao cho $3^m + 2022 = n^2$. (3,0 điểm)	
		Giả sử m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $3^m + 2022 = n^2$.	
		TH1: $m = 0$: LOẠI vì $n^2 = 3^0 + 2022 = 2023$ không phải là một số chính phương.	0,5
		TH2: $m = 1$: $n^2 = 3^1 + 2022 = 2025 = 45^2 \Rightarrow n = 45$.	0,5
		TH3: $m \geq 2$. Khi đó $n^2 = 3^m + 2022 : 3 \Rightarrow n^2 : 3$.	0,5
		dẫn tới $n^2 : 9$ hay $3^m + 2022 : 9$.	0,5
		Điều này vô lí vì $3^m : 9$, còn 2022 không chia hết cho 9.	0,5
		Kết luận, $m = 1, n = 45$.	0,5

2	Tìm số nguyên tố để phương trình ... (2,0 điểm)	
	Biến đổi được $p = x^3 + y^3 - 3xy + 1 = (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y)$.	0,5
	Nhận xét p là số nguyên tố, còn $x + y + 1 > 1$ nên dẫn tới $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 1 \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Chú ý x, y là các số nguyên dương.	0,5
	TH1: $x = 1$, dẫn tới $2(1 - y)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện ta được $x = 1, y = 2$. Từ đó $p = 4$ (LOẠI). TH2: $y = 1$. Làm tương tự ta được $x = 2, y = 1$. Từ đó $p = 4$ (LOẠI).	0,5
	TH3: $x > 1; y > 1$ dẫn tới $\begin{cases} (x - 1)^2 = (y - 1)^2 = 1 \\ (x - y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$. Từ đó $p = 5$. Vậy số nguyên tố p cần tìm là $p = 5$.	0,5
III	Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$. (2,0 điểm)	
	Tìm giá trị lớn nhất. Ta có: $3 - P = \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \geq \frac{9}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{9}{\frac{(a+b+c)^2}{3} + 3} = \frac{27}{13}$	0,5
	Suy ra: $P \leq \frac{12}{13}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{12}{13}$; P đạt giá trị lớn nhất khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.	0,5
	Tìm giá trị nhỏ nhất. Không mất tính tổng quát, giả sử $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$. Vì $0 \leq a, b, c \leq 1$ nên $(a - 1)(b - 1) \geq 0$ suy ra $ab + 1 \geq a + b$, dẫn đến $\frac{a+b}{ab+1} \leq 1$. Chứng minh tương tự: $\frac{a+b}{ab+1} + \frac{b+c}{bc+1} + \frac{c+a}{ca+1} \leq 3$.	0,5
	Từ đó, $2 \cdot (3 - P) = \frac{a+b+c}{ab+1} + \frac{a+b+c}{bc+1} + \frac{a+b+c}{ca+1} \leq 1 + 1 + 1 + \left(\frac{c}{ab+1} + \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} \right) \leq 3 + \frac{a+b+c}{bc+1} \leq 3 + a + b + c = 5$. Nên ta có $3 - P \leq \frac{5}{2} \Rightarrow P \geq \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{2}$; P đạt giá trị nhỏ nhất chẳng hạn khi $a = b = 1, c = 0$.	0,5

IV	1		1) Chứng minh $\widehat{AQE} = 90^\circ$. (2,5 điểm)	
			Dễ chứng minh $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c), suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.	0,5
			Kẻ đường kính AP của (O) . Dễ chứng minh tứ giác $BHCP$ là hình bình hành, nên $BH = CP$.	0,5
			Ta có: $\triangle BHD \sim \triangle ACD$ (g.g) suy ra $\frac{BD}{AD} = \frac{BH}{AC} = \frac{CP}{AC} \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle APC$ (c.g.c).	0,5
			Điều này chứng tỏ $\widehat{BAD} = \widehat{CAP}$.	0,5
			$\widehat{AEF} + \widehat{CAP} = \widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AQE} = 90^\circ$.	0,5
	2		2) Chứng minh $IE^2 = IK.ID$. (2,0 điểm)	
			Xét tam giác AEH vuông tại E có $IE = IA = IH$ nên tam giác AIE cân tại I , suy ra $\widehat{IEA} = \widehat{IAE}$. Tương tự $\widehat{MEC} = \widehat{MCE} \Rightarrow \widehat{IEA} + \widehat{MEC} = \widehat{IAE} + \widehat{MCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IEM} = 90^\circ$.	0,5
			Từ $IE = IF, ME = MF \Rightarrow MI$ là đường trung trực của EF , dẫn đến $MI \perp EF$.	0,5
			N là giao điểm của EF và $MI \Rightarrow IE^2 = IN.IM$.	0,5
			Mặt khác: $\triangle INK \sim \triangle IDM$ (g.g) nên $\frac{IN}{ID} = \frac{IK}{IM}$ suy ra $IN.IM = IK.ID$. Từ đó $IE^2 = IK.ID$.	0,5
	3		3) Chứng minh $JR \perp QD$. (1,5 điểm)	
			Gọi S là điểm đối xứng với F qua Q ; Gọi T là điểm đối xứng với C qua D . Chứng minh được $\widehat{TAF} = \widehat{CAS}$, dẫn tới $\triangle TAF = \triangle CAS$ (c.g.c), nên $FT = CS$.	0,5
			Mặt khác, theo tính chất đường trung bình: $JQ = \frac{1}{2}SC$ và $JD = \frac{1}{2}FT$ suy ra $JD = JQ$.	0,5
			Chứng minh tương tự ta có $RD = RQ$, suy ra JR là đường trung trực của DQ , dẫn tới JR vuông góc với QD .	0,5

V	1	Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho số $(a^3 + b)(b^3 + a)$ là lập phương của một số nguyên tố. (1,0 điểm)	
		Giả sử a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn $(a^3 + b)(b^3 + a) = p^3$ với p là số nguyên tố. Rõ ràng $a \neq b$ vì nếu $a = b$ thì $p^3 = (a^3 + a)^2$ vô lí do p là số nguyên tố. Không mất tổng quát, giả sử $a > b \Rightarrow a^3 + b > b^3 + a$. Với chú ý $U(p^3) = \{1; p; p^2; p^3\} \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b = p^2 \\ b^3 + a = p \\ p > ab \end{cases}$ Vì $a = p - b^3 \Rightarrow (p - b^3)^3 + b = p^2 \Rightarrow b^9 - b : p \Rightarrow b(b-1)(b+1)(b^2+1)(b^4+1) : p$. Ta có $p > b^3 + 1 \geq b^2 + 1 > b + 1 > b > 0$. Do đó còn 2 trường hợp: $\begin{cases} b = 1 \\ b^4 + 1 : p \end{cases}$	0,5
		TH1: $b = 1 \Rightarrow a^3 + 1 = (a + 1)^2 \Rightarrow a = 2; p = 3$. TH2: $b^4 + 1 : p$. Rõ ràng $b(b^3 + a) - (b^4 + 1) : p \Rightarrow ab - 1 : p$ (Vô lí vì $0 < ab - 1 < p$). KẾT LUẬN: $\begin{cases} a = 2, b = 1, p = 3 \\ a = 1, b = 2, p = 3 \end{cases}$	0,5
	2a	Chứng minh mọi cách thực hiện đều phải dừng lại sau hữu hạn bước. (0,25 điểm)	
		Sau mỗi bước, số thu được giảm đi một số nguyên dương đơn vị. Mặt khác số thu được luôn là số không âm. Vì vậy quá trình phải dừng lại sau hữu hạn bước.	0,25
	2b	Chứng minh n là số lẻ. (0,75 điểm)	
		Đếm từ phải sang trái, ta đánh dấu các chữ số có thứ tự là bội của 22. Như vậy có 91 chữ số được đánh dấu ở các vị trí 22, 44, 66, ..., 2002 tính từ phải sang trái. Gọi S là số chữ số 2 trong các chữ số được đánh dấu. Ban đầu $S = 91$, là số lẻ.	0,25
		Trong 22 chữ số liên tiếp luôn có đúng một chữ số được đánh dấu, do đó mỗi bước S tăng 1 hoặc giảm 1, tức là mỗi bước S thay đổi tính chẵn lẻ. Cụ thể là, sau số lẻ bước thay thì S chuyển từ lẻ thành chẵn; sau số chẵn bước thay thì S chuyển từ chẵn thành lẻ.	0,25
		Nếu $S > 0$, tồn tại ít nhất một dãy 22 chữ số liên tiếp có chữ số ngoài cùng bên trái là 2, tức là ta còn có thể thực hiện được ít nhất một bước nữa. Do đó để ta không thể thực hiện được bước nào nữa thì $S = 0$.	0,25
		Từ đó số bước đã thực hiện đến lúc dừng lại phải lẻ, hay n lẻ.	

Bài I.1.

ĐKXD: $x \geq -\frac{1}{3}$.

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$VT = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x+3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3x+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4+(x+3)}{2} + \frac{4+(3x+1)}{2} \right) = x+3 = VP.$$

Vậy phương trình tương đương $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ (TMĐKXD)}$

Cách 3: Phương trình tương đương

$$x-1 - (\sqrt{x+3}-2) - (\sqrt{3x+1}-2) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} \right) = 0 \quad (*)$$

Với $x > 1$ thì $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} < \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ do đó $1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} > 0$ với

$x > 1$. Với $-\frac{1}{3} \leq x < 1$ thì $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} > \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, do đó

$1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} < 0$ với $-\frac{1}{3} \leq x < 1$.

Bài I.2. Cách 2:

Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a^2 + ab = c^2 + bc$ và $a^2 + ac = b^2 + bc$. Tính giá trị của

$$\text{biểu thức } K = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

Từ giả thiết suy ra $(a-c)(a+b+c) = 0$.

TH1: $a+b+c = 0$ suy ra $a+b = -c; b+c = -a; c+a = -b$.

Do đó $1 + \frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} = \frac{-c}{b}; 1 + \frac{b}{c} = \frac{-a}{c}; 1 + \frac{c}{a} = \frac{-b}{a}$. Suy ra $P = \frac{-c}{b} \cdot \frac{-a}{c} \cdot \frac{-b}{a} = -1$.

TH2: $a = c$. Thay vào đẳng thức còn lại ta có $2a^2 = ab + b^2 \Leftrightarrow (a-b)(2a+b) = 0$.

Nếu $a = b = c$ thì $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = 8$.

Nếu $b = -2a = -2c$ thì $P = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) = -1$. Kết luận.

Bài III.1. Cách 2: Ta có

$$\begin{aligned}
 3 - P &= \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \\
 &= \left(\frac{1}{ab+1} + \frac{81}{169} \cdot (ab+1) \right) + \left(\frac{1}{bc+1} + \frac{81}{169} \cdot (bc+1) \right) + \left(\frac{1}{ca+1} + \frac{81}{169} \cdot (ca+1) \right) - \frac{81}{169} \cdot [(ab+bc+ac) + 3] \\
 &\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab+1} \cdot \frac{81}{169} \cdot (ab+1)} + 2\sqrt{\frac{1}{bc+1} \cdot \frac{81}{169} \cdot (bc+1)} + 2\sqrt{\frac{1}{ca+1} \cdot \frac{81}{169} \cdot (ca+1)} - \frac{81}{169} \cdot \left[\frac{(a+b+c)^2}{3} + 3 \right] \\
 &= 3 \cdot 2 \cdot \frac{9}{13} - \frac{81}{169} \cdot \left(\frac{4}{3} + 3 \right) = \frac{27}{13}.
 \end{aligned}$$

Suy ra: $P \leq \frac{12}{13}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{12}{13}$; P đạt giá trị lớn nhất khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Bài III.2. Cách 2: Vì $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$ nên $a + b, b + c, c + a \geq 1$.

Mặt khác: vì $0 \leq a, b, c \leq 1$ nên $(a-1)(b-1) \geq 0$ suy ra $ab+1 \geq a+b$. Từ đó:

$$\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1+c}{a+b+c} + \frac{1+a}{a+b+c} + \frac{1+b}{a+b+c} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca} = 3 - \left(\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \right) \geq 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài III. Cách 3:

Đặt $x = bc; y = ac; z = ab$. Dễ thấy $0 \leq x, y, z \leq 1$.

- Vì $x = bc \geq b + c - 1$ nên $x + y + z \geq 2(a + b + c) - 3 = 1$.
- $x + y + z \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{4}{3}$.

Tìm GTLN.

$$3 - P = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{x+y+z+3} \geq \frac{9}{\frac{4}{3}+3} = \frac{27}{13}.$$

Suy ra: $P \leq \frac{12}{13}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{12}{13}$; P đạt giá trị lớn nhất khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Tìm GTNN.

$$\begin{aligned}
 3 - P &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = \frac{x+y+2}{xy+x+y+1} + \frac{1}{z+1} \leq \frac{x+y+2}{x+y+1} + \frac{1}{z+1} = 1 + \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{z+1} \\
 &= 1 + \frac{x+y+z+2}{(x+y+1)(z+1)} = 1 + \frac{x+y+z+2}{xz+yz+x+y+z+1} \leq 1 + \frac{x+y+z+2}{x+y+z+1} = 1 + 1 + \frac{1}{x+y+z+1} \\
 &\leq 2 + \frac{1}{1+1} = \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca} = 3 - \left(\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \right) \geq 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

Bài V.1 Cách 2:

Rõ ràng $a \neq b$ vì nếu $a = b$ thì $p^3 = (a^3 + a)^2$ vô lí do p là số nguyên tố.

$$\text{Giả sử } a > b. \text{ Với chú ý } U(p^3) = \{1; p; p^2; p^3\} \Rightarrow \begin{cases} a^3 + b = p^2 \\ b^3 + a = p \\ p > ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 + b - (b^3 + a) = (a - b)(a^2 + ab + b^2 - 1) : p \\ a^3 + b + (b^3 + a) = (a + b)(a^2 - ab + b^2 + 1) : p \end{cases}$$

TH1: $a - b : p$. Điều này vô lí vì $0 < a - b < a + b^3 = p$.

TH2: $a + b : p$. Mặt khác $0 < a + b \leq a + b^3 = p$. Từ đó dẫn tới $a + b = p = a + b^3 \Rightarrow b = 1$.

$$b = 1 \Rightarrow a^3 + 1 = (a + 1)^2 \Rightarrow a = 2; p = 3.$$

$$\text{TH3: } \Rightarrow \begin{cases} (a^2 + ab + b^2 - 1) : p \\ (a^2 - ab + b^2 + 1) : p \end{cases} \Rightarrow 2(ab - 1) : p. \text{ Điều này vô lí vì rõ ràng } \Rightarrow \begin{cases} 2 < p \\ 0 < ab - 1 < p \end{cases}$$

$$\text{KẾT LUẬN: } \begin{cases} a = 2, b = 1, p = 3 \\ a = 1, b = 2, p = 3 \end{cases}$$