

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TỈNH BẮC CẠN**

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN  
NĂM HỌC 2022-2023**

**Môn thi: TOÁN CHUYÊN**

*Thời gian làm bài : 150 phút (không kể giao đề)*

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

**Câu 1. (2,0 điểm)**

Cho biểu thức  $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

- 1) Rút gọn biểu thức  $A$
- 2) Tìm các giá trị của  $x$  để  $A = -\frac{13}{6}$

**Câu 2. (2,0 điểm)**

- 1) Giải phương trình  $x^2 + 9x - 2\sqrt{x^2 + 9x - 1} - 4 = 0$
- 2) Giải hệ phương trình : 
$$\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases}$$

**Câu 3. (2,0 điểm)**

- 1) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2mx - m^2 - 2m + 3$  (với  $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  nằm bên phải trục tung
- 2) Tìm các số nguyên tố  $x, y, z$  thỏa mãn  $5(x + y + z) = xyz$

**Câu 4. (3,0 điểm)**

Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $CD$  cố định ( $CD$  không là đường kính).  $I$  là một điểm di động trên tia đối của tia  $DC$  ( $I$  không trùng với  $D$ ). Qua  $I$  kẻ hai tiếp tuyến  $IA, IB$  ( $A, B$  là hai tiếp điểm) với đường tròn  $(O)$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CD$

- 1) Chứng minh năm điểm  $A, I, B, H, O$  cùng thuộc một đường tròn
- 2) Gọi  $E$  là giao điểm của  $IO$  và  $AB$ . Chứng minh  $\angle DEC = \angle DOC$
- 3) Chứng minh đường thẳng  $AB$  luôn đi qua một điểm cố định khi  $I$  di động

**Câu 5. (1,0 điểm)** Cho  $x > 0, y > 0, z > 0$  thỏa mãn  $x + 2y + 3z \geq 10$ . Tìm giá trị nhỏ

nhất của  $P = x + y + z + \frac{3}{4x} + \frac{9}{8y} + \frac{1}{z} + 10$

## ĐÁP ÁN

### Câu 1. (2,0 điểm)

**Cho biểu thức**  $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

#### 3) Rút gọn biểu thức A

Điều kiện :  $x \geq 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} A &= \frac{15\sqrt{x}-11-(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)-(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(2-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

#### 4) Tìm các giá trị của x để $A = -\frac{13}{6}$

$$\frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = -\frac{13}{6} \Leftrightarrow 6(5\sqrt{x}-2) = 13(\sqrt{x}+3)$$

$$\Leftrightarrow 17\sqrt{x} = 51 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9(\text{mdk})$$

Vậy  $x = 9$  thì  $A = -\frac{13}{6}$

### Câu 2. (2,0 điểm)

#### 3) Giải phương trình $x^2 + 9x - 2\sqrt{x^2 + 9x - 1} - 4 = 0$ (1)

ĐKXĐ:  $x^2 + 9x - 1 \geq 0$ ,

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 9x - 1 - 2\sqrt{x^2 + 9x - 1} - 3 = 0$$

Đặt  $t = \sqrt{x^2 + 9x - 1}, (t \geq 0)$ . Phương trình (1) thành :

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(\text{ktm}) \\ t = 3(tm) \Rightarrow x^2 + 9x - 1 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -10 \end{cases} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy  $S = \{1; -10\}$

#### 4) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases} \quad (I)$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 5xy = -4 \\ (x+y) + xy = 2 \end{cases} \cdot \text{Đặt } \begin{cases} S = x+y \\ P = xy \end{cases}$$

Hệ phương trình (I) thành :  $\begin{cases} S^2 - 5P = -4 \\ S + P = 2 \end{cases} (II)$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 5S - 6 = 0 \\ P = S - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} S = 1 \\ P = 1 \end{cases} \Rightarrow X^2 + X + 1 = 0 (ktm) \\ \begin{cases} S = -6 \\ P = 8 \end{cases} \Rightarrow X^2 + 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = -2 \\ X = -4 \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \{(-2; -4); (-4; -2)\}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) \in \{(-2; -4); (-4; -2)\}$

### Câu 3. (2,0 điểm)

**3) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng**

**$(d): y = 2mx - m^2 - 2m + 3$  (với  $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  nằm bên phải trục tung**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là :

$$x^2 = 2mx - m^2 - 2m + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2m - 3 = 0 (1)$$

$(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  đều nằm bên phải trục tung khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2} (*)$$

Khi đó, theo định lý Vi-et ta có :  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m^2 + 2m - 3 \end{cases}$ . Để  $x_1, x_2$  dương thì :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ m^2 + 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > 1 \text{ hoặc } m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 (**)$$

Từ (\*) và (\*\*) suy ra  $1 < m < \frac{3}{2}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán

**4) Tìm các số nguyên tố  $x, y, z$  thỏa mãn  $5(x + y + z) = xyz$**

Vì  $5(x + y + z) = xyz \Rightarrow xyz : 5$

Suy ra trong 3 số  $x, y, z$  có ít nhất một số chia hết cho 5

Vì vai trò  $x, y, z$  như nhau, giả sử  $z : 5$ , mà  $z$  là số nguyên tố nên  $z = 5$

Khi đó phương trình trở thành :

$$x + y + 5 = xy \Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 6 = 2.3 = 1.6$$

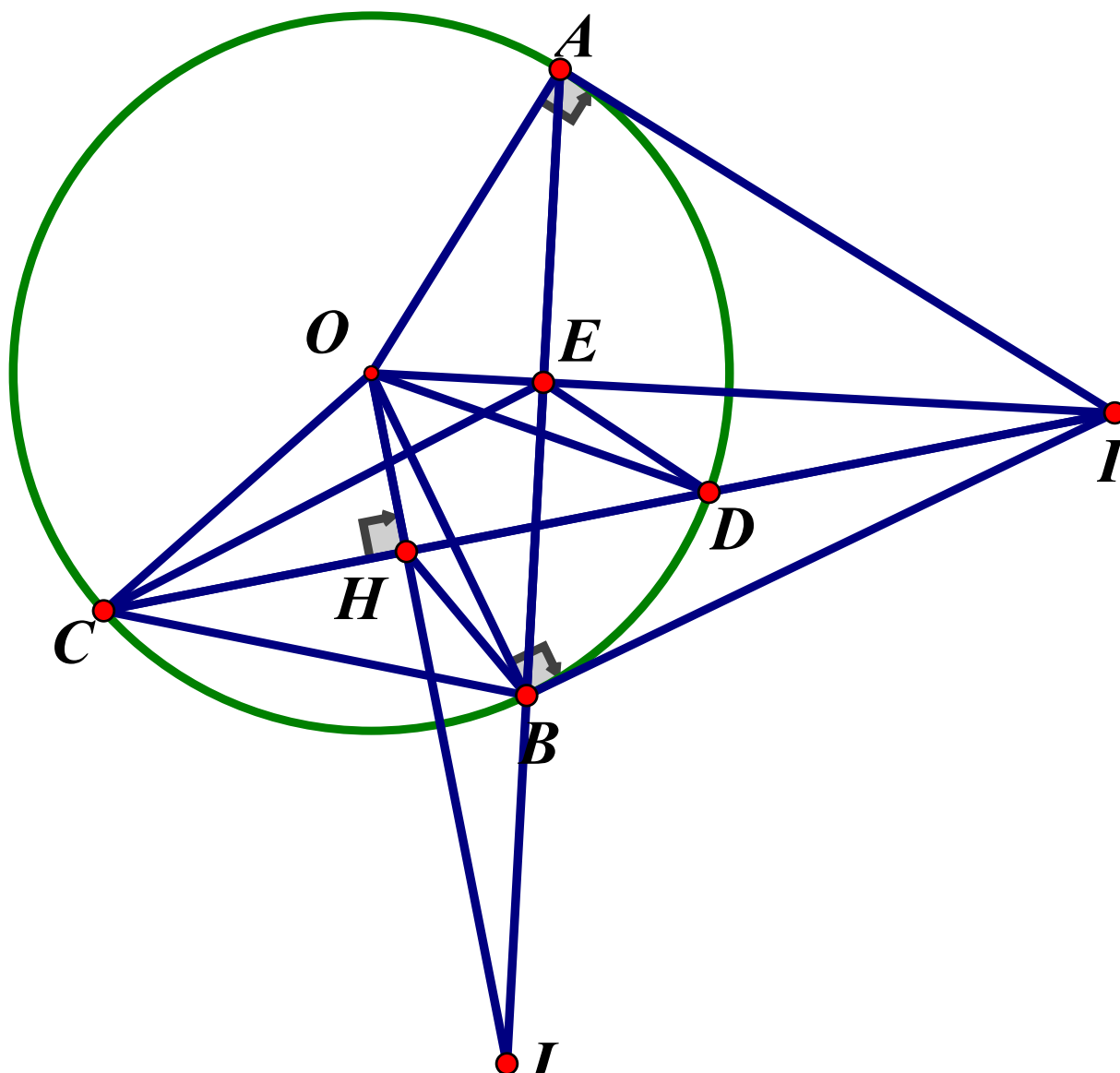
Th1:  $\begin{cases} x - 1 = 2 \\ y - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$  (loại vì  $x, y$  nguyên tố)

$$Th2: \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases} (tm)$$

Vậy  $(x; y; z) \in \{(2; 7; 5); (2; 5; 7); (7; 5; 2); (7; 2; 5); (5; 2; 7); (5; 7; 2)\}$

**Câu 4. (3,0 điểm)**

Cho đường tròn  $(O)$  và dây cung  $CD$  cố định ( $CD$  không là đường kính).  $I$  là một điểm di động trên tia đối của tia  $DC$  ( $I$  không trùng với  $D$ ). Qua  $I$  kẻ hai tiếp tuyến  $IA, IB$  ( $A, B$  là hai tiếp điểm) với đường tròn  $(O)$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $CD$



**4) Chứng minh năm điểm  $A, I, B, H, O$  cùng thuộc một đường tròn**

Ta có  $\angle IAO = \angle IBO = 90^\circ$  (gt)

Vì  $H$  là trung điểm  $CD$  nên  $OH \perp CD \Rightarrow \angle IHO = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle IAO = \angle IBO = \angle IHO = 90^\circ$$

Vậy 5 điểm  $A, I, B, H, O$  cùng thuộc đường tròn đường kính  $OI$

**5) Gọi  $E$  là giao điểm của  $IO$  và  $AB$ . Chứng minh  $\angle DEC = \angle DOC$**

Ta có :  $\begin{cases} OA = OB \\ IA = IB \end{cases}$ . Do đó  $OI$  là đường trung trực của  $AB \Rightarrow OI \perp AB$

Xét  $\triangle OBI$  có  $BE$  là đường cao, ta có  $IE \cdot IO = IB^2$  (1)

$\triangle IBD \sim \triangle ICB$  vì  $\angle BIC$  chung và  $\angle IBD = \angle ICD = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{BD}$

$$\Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{ID}{IB} \Rightarrow IB^2 = IC \cdot ID \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $IE \cdot IO = IC \cdot ID \Rightarrow \frac{IE}{IC} = \frac{ID}{IO}$

$\triangle IED \sim \triangle ICO$  vì  $\angle CIO$  chung và  $\frac{IE}{IC} = \frac{ID}{IO} \Rightarrow \angle IED = \angle ICO$

Suy ra  $\angle DCO + \angle OED = \angle IED + \angle OED = 180^\circ$

Do đó tứ giác  $CDEO$  nội tiếp. Vậy  $\angle COD = \angle CED$  (đpcm)

**6) Chứng minh đường thẳng  $AB$  luôn đi qua một điểm cố định khi  $I$  di động**

Gọi  $J$  là giao điểm của hai đường thẳng  $AB, OH$

$\triangle OHI \sim \triangle OEJ$  vì  $\angle IOJ$  chung và  $\angle OHI = \angle OEJ = 90^\circ$

$$\text{Suy ra } \frac{OH}{OE} = \frac{OI}{OJ} \Leftrightarrow OJ = \frac{OI \cdot OE}{OH} = \frac{OC \cdot OD}{OH}$$

Vì đường tròn  $(O)$ , dây cung  $CD$  cố định nên điểm  $H$  cố định

$$\text{Suy ra } OJ = \frac{OC \cdot OD}{OH} \text{ không đổi}$$

Do đó  $J$  cố định

Vậy đường thẳng  $AB$  luôn đi qua điểm  $J$  cố định khi  $I$  di động

**Câu 5. (1,0 điểm) Cho  $x > 0, y > 0, z > 0$  thỏa mãn  $x + 2y + 3z \geq 10$ . Tìm giá trị nhỏ**

$$\text{nhất của } P = x + y + z + \frac{3}{4x} + \frac{9}{8y} + \frac{1}{z} + 10$$

Áp dụng BĐT Cosi cho hai số dương  $x, \frac{1}{x}$  ta có :

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \left( x + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = 1$

Áp dụng BĐT Cô si cho hai số dương  $y, \frac{9}{4y}$  ta có :

$$y + \frac{9}{4y} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( y + \frac{9}{4y} \right) \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $y = \frac{3}{2}$

Áp dụng BĐT Cô si cho hai số dương  $z, \frac{4}{z}$  ta có :

$$z + \frac{4}{z} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \left( z + \frac{4}{z} \right) \geq 1 \quad (3)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $z = 2$

Theo giả thiết ta có :

$$x + 2y + 3z \geq 10 \Leftrightarrow \frac{x + 2y + 3z}{4} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{3z}{4} \geq \frac{5}{2} \quad (4)$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x = 1, y = \frac{3}{2}, z = 2$

Cộng theo vế các bất (1), (2), (3), (4) ta được :

$$x + y + z + \frac{3}{4x} + \frac{9}{8y} + \frac{1}{z} \geq \frac{13}{2} \Leftrightarrow P \geq \frac{33}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x = 1, y = \frac{3}{2}, z = 2$

Vậy  $\min P = \frac{33}{2} \Leftrightarrow x = 1, y = \frac{3}{2}, z = 2$