

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Xác định tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 8$

b) Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2023}}$

Và $B = \sqrt{\frac{2023-2\sqrt{2022}}{4}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}-\sqrt{6+\sqrt{20}}}$

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy chứng tỏ $A > B$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Tìm một đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên nhận $x = \frac{2+\sqrt[3]{4}}{3}$ là một nghiệm và

$$P(1) = -6$$

b) Tìm nghiệm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn :

$$x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + 4xy - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x+4\sqrt{x-3}+1} + \sqrt{x-4\sqrt{x-3}+1} = x-11$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8xy - x - 14y + 4 = 0 \\ 8x^2y^2 + 7xy - 20y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , kẻ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , lấy điểm M trên cung nhỏ BC ($M \neq B, C$). Gọi P là điểm đối xứng với M qua AB

a) Chứng minh : $\angle APB = \angle ACB$ và tứ giác $AHBP$ nội tiếp đường tròn

b) Chứng minh : H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF}$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1$$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

c) **Xác định tọa độ giao điểm của parabol (P): $y = 3x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2x + 8$**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là :

$$3x^2 = 2x + 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 12 \\ x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{16}{3} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(2; 12), \left(-\frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$

d) **Cho** $A = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2023}}$

Và $B = \sqrt{\frac{2023-2\sqrt{2022}}{4}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}-\sqrt{6+\sqrt{20}}}$

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy chứng tỏ $A > B$

Ta có : $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Do đó, $A = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2021}}{2} = \frac{\sqrt{2023}-1}{2}$

Mặt khác ,

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{\frac{2022-2\sqrt{2022}+1}{4}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}+1}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2022}-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} = \frac{\sqrt{2022}-1}{2} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}-\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{2022}-1}{2} \end{aligned}$$

Vì $\sqrt{2023} > \sqrt{2022}$ nên ta có : $\frac{\sqrt{2023}-1}{2} > \frac{\sqrt{2022}-1}{2}$ hay $A > B$

Câu 2. (2,0 điểm)

c) **Tìm một đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên nhận $x = \frac{2+\sqrt[3]{4}}{3}$ là một nghiệm và**

$$P(1) = -6$$

Ta có $x = \frac{2+\sqrt[3]{4}}{3} \Leftrightarrow 3x-2 = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow (3x-2)^3 = 4 \Leftrightarrow 27x^3 - 18x^2 + 12x - 12 = 0$

Nên đa thức bậc ba $P(x)$ thỏa đề có dạng $P(x) = k(27x^3 - 18x^2 + 12x - 12)$ với k là hằng số

Vì $P(1) = -6$ nên $-3k = -6 \Leftrightarrow k = 2$

Vậy đa thức cần tìm là $P(x) = 54x^3 - 36x^2 + 24x - 24$

d) Tìm nghiệm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn :

$$x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + 4xy - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$\text{Ta có : } x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + 4xy - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2y^2 - 2x^2y + x^2) + (2x^2 + 4xy + 2y^2) - 4x - 4y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - x)^2 + 2(x + y)^2 - 4(x + y) + 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (xy - x)^2 + 2(x + y - 1)^2 = 3$$

Vì x, y là các số nguyên nên $(xy - x)^2$ và $(x + y - 1)^2$ là các số tự nhiên

$$\text{Do đó, } (xy - x)^2 + 2(x + y - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} (xy - x)^2 = 1 \\ (x + y - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x(y - 1)]^2 = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 + 2x(y - 1) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(y - 1) = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x(y - 1) = -1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 3 \end{cases}$$

Cả hai trường hợp đều không thỏa mãn

Vậy , không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đề bài

Câu 3. (2,0 điểm)

c) Giải phương trình $\sqrt{x + 4\sqrt{x - 3} + 1} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 3} + 1} = x - 11$

Điều kiện : $x \geq 3$

Với điều kiện đó, ta có $\sqrt{x + 4\sqrt{x - 3} + 1} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 3} + 1} = x - 11$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x - 3 + 4\sqrt{x - 3} + 4} + \sqrt{x - 3 - 4\sqrt{x - 3} + 4} = x - 11$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x - 3} + 2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x - 3} - 2)^2} = x - 11 \Leftrightarrow |\sqrt{x - 3} + 2| + |\sqrt{x - 3} - 2| = x - 11$$

Nếu $x < 11$ thì $x - 11 < 0$, ktm phương trình

Nếu $x \geq 11$ thì $\sqrt{x - 3} - 2 > 0$ ta có :

$$|\sqrt{x - 3} + 2| + |\sqrt{x - 3} - 2| = x - 11 \Leftrightarrow 2\sqrt{x - 3} = x - 11$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 26x + 133 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7(ktm) \\ x = 19(tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 19$

d) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8xy - x - 14y + 4 = 0 \\ 8x^2y^2 + 7xy - 20y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Nếu $y = 0$ thì không thỏa mãn hệ

Nếu $y \neq 0$ thì hệ tương đương với :

$$\begin{cases} 8x - \frac{x}{y} - 14 + \frac{4}{y} = 0 \\ 8x^2 + 7\frac{x}{y} - 20 + \frac{2}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(2x + \frac{1}{y}\right) - \frac{x}{y} - 14 = 0(1) \\ 2\left(2x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 20 = 0(2) \end{cases}$$

Trừ (2) cho (1) về theo về ta được $2\left(2x + \frac{1}{y}\right)^2 - 4\left(2x + \frac{1}{y}\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = -1 \\ 2x + \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$

Th1: $2x + \frac{1}{y} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2x - 1$

Thay vào (1), ta có: $-4 - x(-2x - 1) - 14 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{2}$

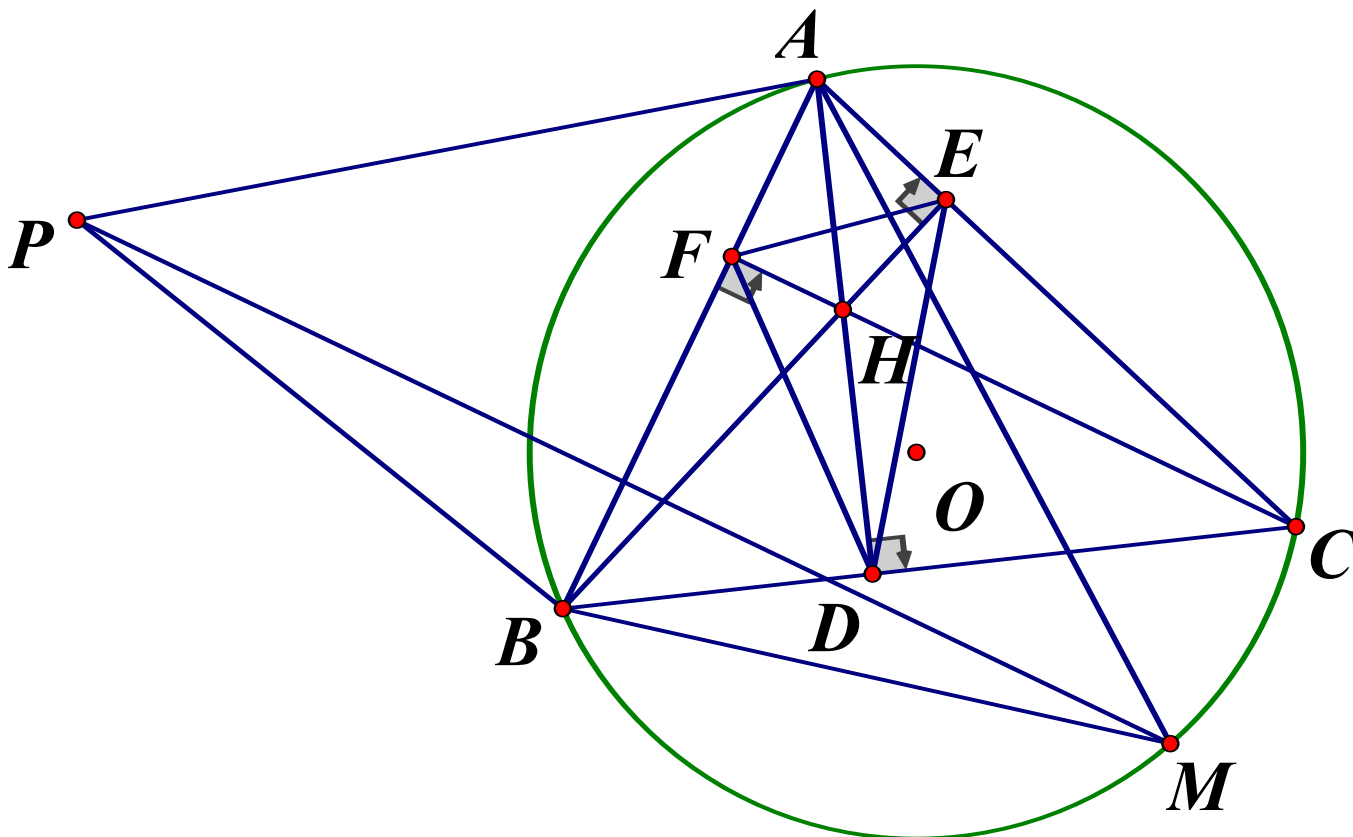
Th2: $2x + \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2x + 3$

Thay vào (1), ta có $12 - x(-2x + 3) - 14 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$\left(\frac{-1 - \sqrt{145}}{2}; \frac{\sqrt{145}}{145}\right); \left(\frac{-1 + \sqrt{145}}{2}; -\frac{\sqrt{145}}{145}\right); (2; -1); \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , kẻ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , lấy điểm M trên cung nhỏ BC ($M \neq B, C$). Gọi P là điểm đối xứng với M qua AB



a) Chứng minh : $\angle APB = \angle ACB$ và tứ giác $AHBP$ nội tiếp đường tròn

P đối xứng với M qua AB nên $\angle APB = \angle APM + \angle MPB = \angle AMP + \angle PMB = \angle AMB$ (1)

Do $\angle AMB$ và $\angle ACB$ là các góc nội tiếp cùng chắn cung AB nên $\angle AMB = \angle ACB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle APB = \angle ACB$ (3)

Tứ giác $DHCE$ có $\angle HDC = \angle HEC = 90^\circ$ (vì AD, BE là các đường cao của $\triangle ABC$) nên $\angle ECD + \angle EHD = 180^\circ$. Suy ra $\angle ACB + \angle AHB = 180^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle APB + \angle AHB = 180^\circ$. Do đó, tứ giác $AHBP$ nội tiếp một đường tròn

b) Chứng minh : H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE

Dễ thấy $HFAE, AEDB, DBFH$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle HFE = \angle HAE = \angle HBD = \angle HFD$

Suy ra HF là đường phân giác của tam giác FDE

Tương tự, HD cũng là đường phân giác của tam giác FDE

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF}$

Đặt $S_{HBC} = x, S_{HCA} = y, S_{HAB} = z$. Ta có : $\frac{AD}{HD} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot BC}{\frac{1}{2}HD \cdot BC} = \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}} = \frac{x+y+z}{x}$

Tương tự ta cũng có : $\frac{BE}{HE} = \frac{x+y+z}{y}; \frac{CF}{HF} = \frac{x+y+z}{z}$. Suy ra :

$$T = \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$$

$$\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \text{ (BDT Co-si)}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \\ \frac{y}{z} = \frac{z}{y} \\ \frac{z}{x} = \frac{x}{z} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \begin{cases} AD = 3HD \\ BE = 3HE \\ CF = 3HF \end{cases} \Leftrightarrow H \text{ là trọng tâm } \Delta ABC$

Mà H cũng là trọng tâm ΔABC nên lúc đó ΔABC là tam giác đều

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM : ta có : $x^2 + y^2 \geq 2xy; y^2 + z^2 \geq 2yz; z^2 + x^2 \geq 2zx$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

Ta có : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 3xyz$. Do đó $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq xyz$ (1)

Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức AM – GM cho ba số không âm a, b, c :

$$a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}$$

Áp dụng bất đẳng thức này, ta có $3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} \Leftrightarrow xyz \geq 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$