

## I. Ngày thứ nhất

**Câu 1.** Đa thức  $x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) có 3 nghiệm thực thoả mãn nghiệm lớn nhất bằng tổng 2 nghiệm còn lại. Chứng minh rằng  $c > ab$ .

**Câu 2.** Cho dãy số  $(a_n) : a_1 = 88, a_{n+1} = \left| a_n - \frac{1}{88n} \right| \forall n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng  $(a_n)$  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Câu 3.** Cho bảng ô vuông  $2022 \times 2022$ . Ban đầu, có một ô vuông trong bảng chứa  $2022^2$  viên sỏi. Chọn một ô vuông có lớn hơn hoặc bằng 2 viên sỏi rồi chuyển cho 2 ô vuông đối xứng qua ô vuông đó và có chung ít nhất 1 đỉnh mỗi ô 1 viên sỏi. Hỏi sau một số hữu hạn bước thực hiện như vậy, ta có thể thu được bảng  $2022 \times 2022$  mà mỗi ô vuông có chứa 1 viên sỏi được hay không ?

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Đường tròn  $(J)$  tiếp xúc với  $AB, AC$  lần lượt tại  $E, F$  và cắt đường tròn  $(O)$  tại  $P, Q$ . Tiếp tuyến của  $(J)$  tại  $P, Q$  cắt nhau tại  $T$ ,  $AT$  cắt đường tròn  $(O)$  tại  $K$ .  $BE, CF$  cắt nhau tại  $X$ ,  $AX$  cắt  $BC$  tại  $D$ .  $H$  là chân đường cao hạ từ  $D$  xuống  $EF$ . Chứng minh rằng

a)  $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$

b)  $KD$  đi qua điểm chính giữa cung  $BC$  chứa  $A$  của  $(O)$ .

**Bài 5:** (6,0 điểm) Tồn tại hay không một hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn: Với mọi số thực  $x, y$  ta có bất đẳng thức

$$f(x - f(y)) \leq x - y f(x)?$$

**Bài 6:** (7,0 điểm) Một vùng nọ có 88 thành phố và giữa hai thành phố bất kỳ được kết nối bởi một tuyến bay trực tiếp (hai chiều). Ủy ban Hàng không dự kiến cấp phép cho 88 hãng hàng không khai thác các tuyến bay đó, một tuyến bay bất kỳ sẽ được khai thác bởi đúng một trong các hãng đó và mỗi hãng khai thác ít nhất một tuyến bay. Hơn nữa, người ta muốn rằng với 3 hãng hàng không bất kỳ, luôn tìm được 3 thành phố sao cho 3 tuyến bay trực tiếp kết nối chúng được khai thác bởi 3 hãng đó. Hỏi Ủy ban Hàng không có thể thực hiện được điều đó hay không?

**Bài 7:** (7,0 điểm) Cho các số nguyên  $m, n$  lớn hơn 1 thỏa mãn  $m \mid n^3 - 1$  và  $n \mid m - 1$ . Chứng minh rằng  $m = \sqrt{n^3} + 1$  hoặc  $m = n^2 + n + 1$ .

## Đáp án

(CM) d

1. Gọi  $x_1 < x_2 < x_3$  là các nghiệm của đa thức  $x^3 + ax^2 + bx + c$ . Theo giả thiết,  $x_3 = x_1 + x_2$ . Chú ý rằng  $x_1 = x_3 - x_2 > 0$ .

(5) Viet d d

Ta có, theo công thức Viete,

(6) c ab d d

$$\begin{aligned} c - ab &= -x_1x_2x_3 + (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \\ &= -x_1x_2(x_1 + x_2) + 2(x_1 + x_2)(x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2) \\ &= (x_1 + x_2)(x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2) > 0. \end{aligned}$$

(7) (1) 2 d

2. Trước hết, để ý rằng  $a_n \geq 0$  với mọi  $n$ . Bây giờ, ta nhắc lại kết quả quen biết sau:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = +\infty.$$

(8) d d

Bây giờ, ta sẽ chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương  $N$ , luôn tồn tại số nguyên dương  $n \geq N$  để  $a_n \leq \frac{1}{88n}$ . Thật vậy, giả sử ngược lại, tồn tại số nguyên dương  $N$  sao cho với mọi  $n \geq N$  thì  $a_n \geq \frac{1}{88n}$ . Như vậy  $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{88n}$  với mọi  $n \geq N$ . Từ đó suy ra

(9) CM

$$a_{N+k+1} = a_N - \frac{1}{88} \left( \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+k} \right).$$

Theo (\*), vế phải tiến ra  $-\infty$ , khi  $k$  tiến ra  $+\infty$ , nói riêng  $a_{N+k+1}$  là một số âm kể từ một chỉ số nào đó, mâu thuẫn.

Cố định một số thực  $\epsilon > 0$ . Tiếp theo, chọn một số nguyên dương  $N_0$  sao cho  $\frac{1}{88N_0} < \epsilon$ .

Theo kết quả trên đây, tồn tại chỉ số  $N \geq N_0$  sao cho  $a_N \in [0, \frac{1}{88N}]$ . Bằng quy nạp, ta dễ dàng chỉ ra được rằng  $a_n \in [0, \frac{1}{88N}]$  với mọi  $n \geq N$  (nếu, với  $n \geq N$ , ta có  $0 \leq a_n \leq \frac{1}{88N}$ , thì  $a_{n+1} = |a_n - \frac{1}{88n}| \leq \max\{a_n, \frac{1}{88n}\} \leq \frac{1}{88N}$  do  $a_n \leq \frac{1}{88N}$  và  $\frac{1}{88n} \leq \frac{1}{88N}$ ). Điều này chứng tỏ  $a_n \in [0, \epsilon)$  với mọi  $n \geq N$ . Theo định nghĩa, điều này có nghĩa là  $a_n$  tiến tới 0 khi  $n$  tiến ra  $+\infty$ .

3. Đánh số các cột của bảng, theo thứ tự từ trái qua phải,  $1, 2, \dots, 2022$ .

✗ Với mỗi viên sỏi, ta gọi trọng số của nó là số thứ tự của cột chứa ô mà nó đang ở trong. Gọi  $S$  là tổng các trọng số của tất cả các viên sỏi.

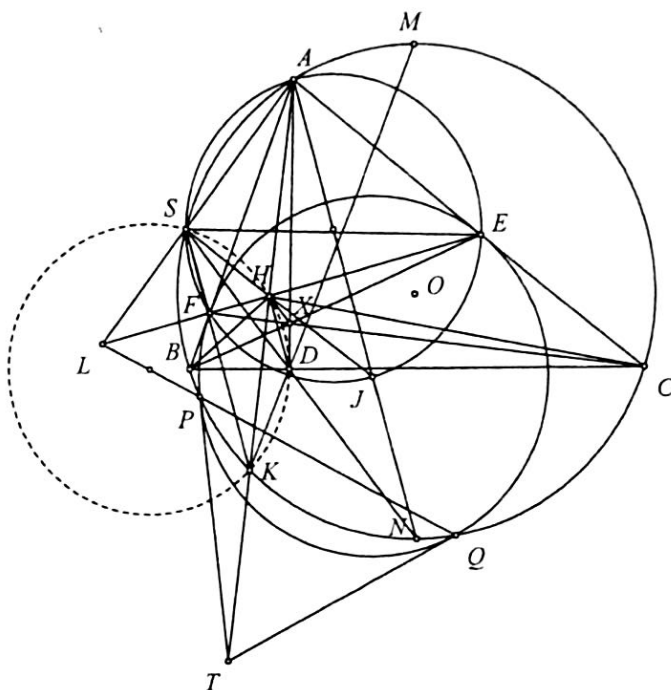
✗ Để ý rằng, theo quy tắc chuyển sỏi thì trọng số của 2 viên sỏi được chuyển đi là không đổi. Vì thế,  $S$  là bất biến.

✗ Ban đầu, nếu ô chứa sỏi nằm ở cột thứ  $k$  thì  $S = 2022^2 k$ . Mặt khác, trong cấu hình mà mỗi ô chứa đúng 1 viên sỏi thì tổng các trọng số là

$$2022(1 + 2 + \cdots + 2022) = \frac{2022^2 \cdot 2023}{2}.$$

Như vậy, nếu có thể đưa được về cấu hình như yêu cầu thì  $2022^2 k = \frac{2022^2 \cdot 2023}{2}$ , dẫn đến  $k = \frac{2023}{2}$ , vô lý vì đây không phải là số nguyên.

4. a) Gọi  $R$  là giao điểm của  $EF$  và  $BC$ . Khi đó, bằng việc xét tam giác  $ABC$  và điểm  $X$ , ta có  $(R, D, B, C) = -1$ . Từ đó suy ra  $(HD, HF, HB, HC) = -1$  mà  $\angle FHD = 90^\circ$  nên  $HD$  là phân giác của  $\angle BHC$ . Suy ra  $\angle FHB = \angle EHC$ . Mặt khác,  $\angle BFE = \angle CEF$ . Từ đó,  $\triangle BFH \sim \triangle CEH$  và  $\angle ABH = \angle ACH$ .



- b) Gọi  $S$  là giao điểm khác  $A$  của đường tròn đường kính  $AJ$  (cũng chính là đường tròn  $(AEF)$ ) với  $(O)$ . Ta có  $\triangle SFB \sim \triangle SEC$  nên, kết hợp với  $\triangle BFH \sim \triangle CEH$ , ta có  $\frac{FH}{EH} = \frac{FB}{EC} = \frac{SE}{SF}$ . Suy ra  $SH$  là phân giác của  $\angle FSE$ .

Xét các trục đẳng phương của các cặp đường tròn từ ba đường tròn  $(AEF)$ ,  $(J)$ ,  $(O)$  ta suy ra  $AS, EF, PQ$  đồng quy; gọi giao điểm chung là  $L$ . Ta có  $\angle LSH = 90^\circ$  nên  $(L, H, E, F) = -1$ . Suy ra các điểm  $A, H, T$  đều nằm trên đường đối cực của  $L$  ứng với  $(J)$  hay  $H \in AT$ .

Lại có  $\frac{SB}{SC} = \frac{BF}{CE} = \frac{BH}{CH} = \frac{DB}{DC}$  nên  $SD$  là phân giác của  $\angle BSC$ . Từ đó  $SD$  đi qua  $N$  là điểm chính giữa cung  $BC$  không chứa  $A$  của đường tròn  $(O)$ .

Ta có  $\angle KHD = \angle KAN = \angle KSD$ , suy ra  $S, H, D, K$  đồng viên. Mà  $\frac{SB}{SC} = \frac{HB}{HC} = \frac{DB}{DC} = k$  nên  $(SHD)$  là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng  $BC$  ứng với tỉ số  $k$ . Suy ra  $\frac{KB}{KC} = \frac{DB}{DC}$ . Do đó  $KD$  là phân giác của  $\angle BKC$ , hay  $KD$  đi qua điểm chính giữa cung  $BAC$  của  $(O)$ .

5. Không tồn tại một hàm số như vậy. Ta lập luận bằng phản chứng. Giả sử  $f$  thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Thế  $y = 0$  vào bất đẳng thức của bài toán, ta được  $f(x - f(0)) \leq x$  với mọi  $x$ . Bất đẳng thức này tương đương với (bằng cách thay  $x$  bằng  $x - f(0)$ ):

$$f(x) \leq x + f(0)$$

(\*) 1

với mọi  $x$ .

Tiếp theo, thay  $x$  bằng  $f(y)$ , ta được

$$f(0) \leq f(y) - yf(f(y)) \leq y + f(0) - yf(f(y)),$$

trong đó bất đẳng thức cuối đến từ (\*). Từ đó suy ra  $y \geq yf(f(y))$  với mọi  $y$ . Như vậy, với mọi  $y < 0$  thì

$$1 \leq f(f(y)).$$

Thế nhưng, bằng cách áp dụng (\*) liên tiếp, ta có

$$f(f(y)) \leq f(y) + f(0) \leq y + f(0) + f(0) = y + 2f(0).$$

Vì thế, bất đẳng thức ở trên cho thấy

$$1 \leq y + 2f(0)$$

với mọi  $y < 0$ . Hiển nhiên, với  $y < -2f(0)$  (và  $y < 0$ ) thì bất đẳng thức này không đúng. Đây là điều mâu thuẫn cần tìm.

6. Ta sẽ chỉ ra rằng điều đó là không thể. Ta sẽ đưa ra lập luận tổng quát khi thay thế 88 bằng  $2n$ . Cụ thể hơn, ta sẽ lập luận bằng phản chứng để chỉ ra rằng không thể tô các cạnh của một đồ thị đầy đủ trên  $2n$  đỉnh bằng  $2n$  màu (mỗi màu được dùng để tô cho ít nhất một cạnh) sao cho với 3 màu bất kỳ, luôn tồn tại một tam giác có các cạnh được tô bởi 3 màu đó.

Giả sử ngược lại. Xét một màu bất kỳ, chẳng hạn là màu đỏ và gọi  $k$  là số các cạnh được tô màu đỏ. Có  $C_{2n-1}^2$  cách chọn một bộ 2 màu khác màu đỏ. Mỗi bộ 2 màu đó, cùng với màu đỏ, cho ta một bộ ba màu, trong đó có một màu là đỏ. Theo giả thiết, mỗi bộ như vậy cho ta một tam giác có 3 cạnh được tô bởi các màu trong bộ đó. Nói riêng, có ít nhất  $C_{2n-1}^2$  tam giác có một cạnh là màu đỏ trong đồ thị đã cho.

Mặt khác, do có  $k$  cạnh màu đỏ, và mỗi cạnh màu đỏ cho ta  $2n - 2$  tam giác nhận cạnh đó là một trong các cạnh của nó. Vì thế, có không quá  $k(2n - 2)$  tam giác có một cạnh là đỏ. Từ đó suy ra  $k(2n - 2) \geq C_{2n-1}^2$ , dẫn đến  $k \geq \frac{2n-1}{2}$  và vì thế  $k \geq n$ .

Như vậy, mỗi màu được tô cho ít nhất  $n$  cạnh. Thế mà có  $2n$  màu được dùng để tô nên số cạnh của đồ thị không nhỏ hơn  $2n^2$ . Nhưng điều này là vô lý do số cạnh của đồ thị đầy đủ trên  $2n$  đỉnh là  $\frac{2n(2n-1)}{2} < 2n^2$ .

7. Đặt  $n^3 - 1 = mk$ , trong đó  $k$  là một số nguyên dương. Ta có  $m \equiv 1 \pmod{n}$  nên  $k \equiv -1 \pmod{n}$ , hay  $k = ln - 1$ , trong đó  $l$  là một số nguyên dương. Như vậy,  $m = \frac{n^3-1}{ln-1}$ . Từ đó, giả thiết  $m > 1$  (và  $n > 1$ ) dẫn đến

$$l < n^2. \quad (1)$$

Ta có  $ln - 1 \mid n^3 - 1$  nên  $ln - 1 \mid n(n^2 - l) + ln - 1 = n(n^2 - l)$ , dẫn đến  $ln - 1 \mid n^2 - l$  (do  $n, ln - 1$  nguyên tố cùng nhau). Tiếp theo,  $ln - 1 \mid n^2 - l = n(n - l^2) + l(ln - 1)$  nên

$$ln - 1 \mid n - l^2. \quad (2)$$

Giả sử  $m \neq n^{3/2} + 1$  (do  $m = \frac{n^3-1}{ln-1}$  nên điều này tương đương với  $l \neq \sqrt{n}$ ); ta sẽ chỉ ra rằng  $m = n^2 + n + 1$ .

Trước hết, xét trường hợp  $1 < l < n$ . Do  $l \neq \sqrt{n}$  nên ta có  $0 < |n - l^2| < ln - 1$ , mâu thuẫn với (2): thật vậy, nếu  $1 < l < n \leq l^2$  thì  $|n - l^2| = l^2 - n < ln - 1$  tương đương với  $l^2 + 1 < n(l + 1)$ , đúng do  $n > l > 1$ ; còn nếu  $l^2 < n$  thì rõ ràng  $|n - l^2| = n - l^2 < ln - 1$  tương đương với  $l(n + 1) + l^2 - 1 > 0$  cũng hiển nhiên đúng.

Tiếp theo, xét trường hợp  $n \leq l < n^2$ . Trong trường hợp này ta hiển nhiên có  $0 < n^2 - l < ln - 1$  (do  $n(n - l) - l \leq -l < -1$ ).

Các lập luận trên cho thấy ta phải có  $l = 1$ , hay  $m = n^2 + n + 1$ . Bài toán được giải quyết.

$$n^3 - 1 = (n^2 + n + 1)(n - 1)$$

$$0 < l < n \rightarrow \alpha(n - l^2) \\ n - l^2 < nl - 1$$