

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

b) Cho đa thức bậc hai $P(x)$ thỏa mãn $P(1)=1, P(3)=3, P(7)=31$. Tính giá trị của $P(10)$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 4 = \frac{7x^2}{x+1}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(2x+1) = y(x+y-2) + 1 \\ 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{y+2} = 11 - x. \end{cases}$$

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D ($D \neq A$). Trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) lấy điểm G khác C sao cho $AG > GC$; một đường tròn có tâm là K đi qua A, G và cắt đoạn thẳng AD tại điểm P nằm bên trong tam giác ABC . Đường thẳng GK cắt đường tròn (O) tại điểm M ($M \neq G$).

a) Chứng minh các tam giác KPG, ODG đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh GP, MD là hai đường thẳng vuông góc.

c) Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng OD và KP , đường thẳng qua A và song song với BC cắt đường tròn (K) tại điểm E ($E \neq A$). Chứng minh rằng tứ giác $DGFP$ là tứ giác nội tiếp và $\widehat{EGF} = 90^\circ$.

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y^2(y-x) = 5xy^2 - 27$.

b) Cho $p_1, p_2, \dots, p_{12}$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Câu 5 (1,5 điểm).

a) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$.

b) Xét hai tập hợp A, B khác $\emptyset$ thỏa mãn $A \cap B = \emptyset$ và $A \cup B = \mathbb{N}^*$. Biết rằng A có vô hạn phần tử và tổng của mỗi phần tử thuộc A với mỗi phần tử thuộc B là phần tử thuộc B . Gọi x là phần tử bé nhất thuộc B thỏa mãn $x \neq 1$. Hãy tìm x .

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:.....

Họ tên, chữ ký GT 1:.....

Số báo danh:.....

Họ tên, chữ ký GT 2:.....

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH**

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT
CHUYÊN**

Năm học 2021– 2022.

Môn thi: TOÁN (chuyên)

(Hướng dẫn chấm gồm: 05 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

b) Cho đa thức bậc hai $P(x)$ thỏa mãn $P(1)=1, P(3)=3, P(7)=31$. Tính giá trị của $P(10)$.

Ý	Nội dung	Điểm
1a 1,0đ	+ Ta có $0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1 + 2(ab + bc + ca)$ suy ra $ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$.	0,5
	+ Từ $(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c)$ suy ra $S = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$.	0,5
1b 1,0đ	+ Đặt $P(x) = ax^2 + bx + c$ thì có hệ $\begin{cases} a + b + c = P(1) = 1 \\ 9a + 3b + c = P(3) = 3 \\ 49a + 7b + c = P(7) = 31 \end{cases}$	0,5
	+ Giải hệ được $a = 1, b = -3, c = 3$.	0,25
	+ Suy ra $P(x) = x^2 - 3x + 3$ nên $P(10) = 10^2 - 3 \cdot 10 + 3 = 73$.	0,25
	Cách khác: + Thấy $P(x) - x$ có nghiệm là $x = 1, x = 3$ nên có $P(x) - x = a(x - 1)(x - 3)$. + Từ $P(7) = 31$ nên $31 - 7 = a(7 - 1)(7 - 3) \Leftrightarrow a = 1$. + Vậy $P(x) = (x - 1)(x - 3) + x \Rightarrow P(10) = 73$.	

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 4 = \frac{7x^2}{x+1}$.

H O C M A I

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(2x+1) = y(x+y-2) + 1 \\ 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{y+2} = 11-x. \end{cases}$$

Ý	Nội dung	Điểm
2a 1,0đ	+ Điều kiện xác định $x \neq -1$. + PT cho tương đương với $\left(x - \frac{x}{x+1}\right)^2 + 4 = \frac{7x^2}{x+1} - \frac{2x^2}{x+1}$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x^2}{x+1} + 4 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = 1 \text{ (1) hoặc } \frac{x^2}{x+1} = 4 \text{ (2)}$	0,25
	+ Giải (1) được $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.	0,25
	+ Giải (2) được $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 2 \pm 2\sqrt{2}\right\}$	0,25
	Cách khác: Quy đồng, rút gọn được $x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 - 4x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = 2 \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$	
2b 1,0đ	Xét hệ $\begin{cases} x(2x+1) = y(x+y-2) + 1 \text{ (1)} \\ 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{y+2} = 11-x \text{ (2)} \end{cases}$ + Điều kiện xác định: $x \geq -3$ và $y \geq -2$.	0,25
	+ Ta có (1) $\Leftrightarrow y^2 + y(x-2) - 2x^2 - x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (y-1-x)(y-1+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ y = 1-2x \end{cases}$	0,25
	+ Với $y = x+1$, thay vào (2) ta được $6\sqrt{x+3} = 11-x \Leftrightarrow \begin{cases} 11-x \geq 0 \\ 36(x+3) = (11-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 29 - 6\sqrt{23}.$ Khi $x = 29 - 6\sqrt{23}$ thì $y = x+1 = 30 - 6\sqrt{23}$ (thỏa mãn điều kiện).	0,25
	+ Với $y = 1-2x$, thay vào (2) ta được	0,25

$$4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11 - x \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + (\sqrt{3-2x} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3-2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Khi đó có } y = 1 - 2x = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

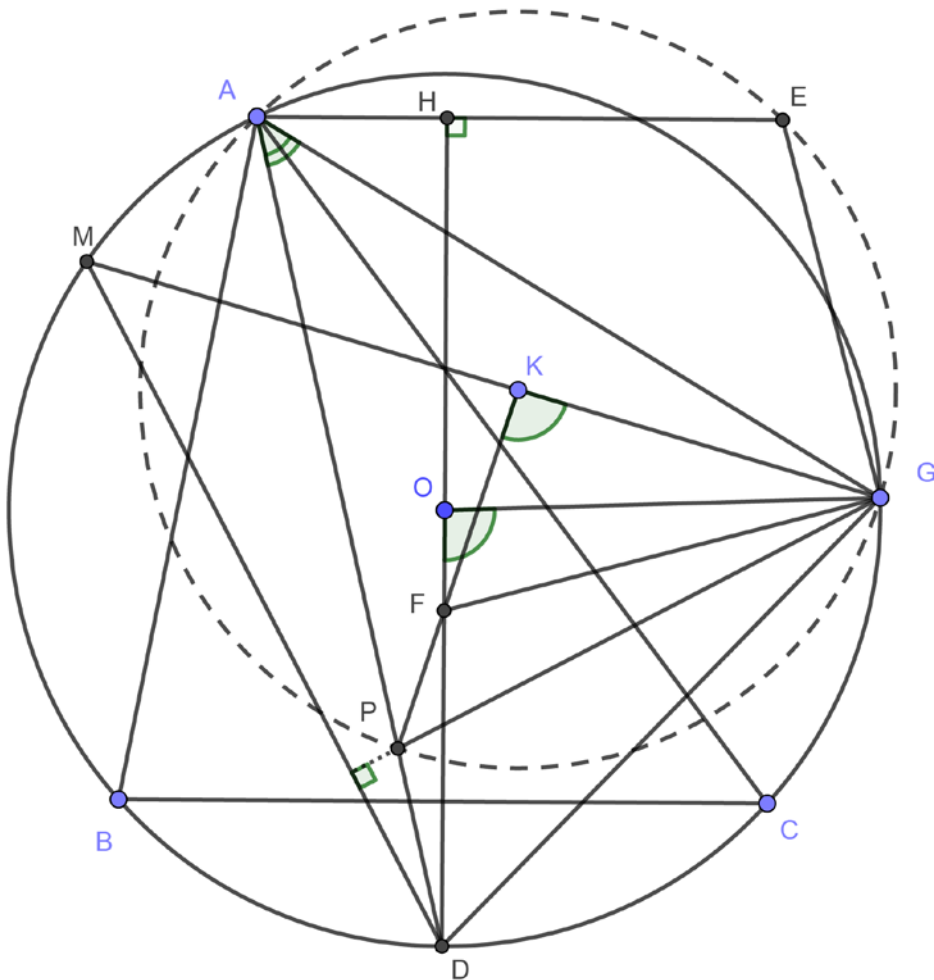
+ Kết luận: Hệ cho có đúng hai bộ nghiệm $(x; y)$ là $(29 - 6\sqrt{23}; 30 - 6\sqrt{23})$, $(1; -1)$.

Câu 3 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$ cắt đường tròn (O) tại D ($D \neq A$). Trên cung nhỏ AC của đường tròn (O) lấy điểm G khác C sao cho $AG > GC$; một đường tròn có tâm là K đi qua A, G và cắt đoạn thẳng AD tại điểm P nằm bên trong tam giác ABC . Đường thẳng GK cắt đường tròn (O) tại điểm M ($M \neq G$).

a) Chứng minh các tam giác KPG , ODG đồng dạng với nhau.

b) Chứng minh GP, MD là hai đường thẳng vuông góc.

c) Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng OD và KP , đường thẳng qua A và song song với BC cắt đường tròn (K) tại điểm E ($E \neq A$). Chứng minh rằng tứ giác $DGFP$ là tứ giác nội tiếp và $\widehat{EGF} = 90^\circ$.



Ý	Nội dung	Điểm
3a 1,0đ	+ Xét đường tròn (O) có $\widehat{DOG} = 2\widehat{DAG}$.	0,25
	+ Xét đường tròn (K) có $\widehat{PKG} = 2\widehat{PAG}$.	0,25
	Suy ra $\widehat{DOG} = \widehat{PKG}$ (1).	0,25
	+ Tam giác PKG cân ở K và tam giác DOG cân ở O (2). Từ (1) và (2) suy ra hai tam giác này đồng dạng với nhau.	0,25
3b 1,0đ	Có $\widehat{MGP} = \widehat{KGP} = 90^\circ - \frac{\widehat{GKP}}{2} = 90^\circ - \widehat{DAG}$	0,5
	Mặt khác $\widehat{DAG} = \widehat{DMG}$ nên $\widehat{MGP} + \widehat{DMG} = 90^\circ$, suy ra $GP \perp DM$	0,5
3c 1,0đ	Ta có $\widehat{FPG} = \widehat{KPG} = \widehat{ODG} = \widehat{FDG}$, suy ra tứ giác $DGFP$ nội tiếp	0,5
	Suy ra $\widehat{DFG} = \widehat{DPG}$. Tứ giác $APGE$ nội tiếp nên $\widehat{DPG} = \widehat{AEG}$.	0,25
	Suy ra $\widehat{AEG} = \widehat{DFG}$ hay $\widehat{HEG} = \widehat{DFG}$ với H là giao điểm của OD và AE . Suy ra tứ giác $HEGF$ nội tiếp.	
	$OD \perp BC$ nên $OD \perp AE$, suy ra $\widehat{FHE} = 90^\circ$, do đó $\widehat{EGF} = 180^\circ - \widehat{FHE} = 90^\circ$.	0,25

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2y^2(y-x) = 5xy^2 - 27$.

b) Cho $p_1, p_2, \dots, p_{12}$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{12}^2$ chia hết cho 12.

Ý	Nội dung	Điểm
4a 0,75đ	+ Giả sử có $x, y \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn yêu cầu. Ta có $y^2(x^3 - x^2y + 5x) = 27$ (1). Suy ra 27 chia hết cho y^2 nên $y^2 \in \{1; 9\}$ hay $y \in \{1; 3\}$.	0,25
	+ Xét $y=1$, thay vào (1) có $x^3 - x^2 + 5x = 27 \Leftrightarrow x(x^2 - x + 5) = 27$.	0,25
	Điều này chứng tỏ x là ước nguyên dương của 27 và có $5x \leq 27 \Leftrightarrow x \leq \frac{27}{5}$, suy ra $x=1$ hoặc $x=3$. Thử trực tiếp hai trường hợp này thấy không thỏa mãn.	
	+ Xét $y=3$, thay vào (1) có $x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x=1$. Vậy $(x; y) = (1; 3)$.	0,25
4b 0,75đ	+ Với p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên có dạng $p = 6k \pm 1 (k \in \mathbb{N}^*)$	0,25
	Suy ra $p^2 - 1 = 36k^2 \pm 12k$ chia hết cho 12.	0,25
	+ Áp dụng có $(p_1^2 - 1) + (p_2^2 - 1) + \dots + (p_{12}^2 - 1)$ chia hết cho 12 Suy ra $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{12}^2$ chia hết cho 12.	0,25
	Cách viết khác: + Từ $p = 3k \pm 1 (k \in \mathbb{N}^*)$ suy ra $p^2 - 1 = 9k^2 \pm 6k$ chia hết cho 3.	

	+ Từ $p = 4k \pm 1 (k \in \mathbb{N}^*)$, khi đó có $p^2 - 1 = 16k^2 \pm 8k$ chia hết cho 4. Suy ra $p^2 - 1$ chia hết cho 12. + Áp dụng suy ra $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{12}^2$ chia hết cho 12.	
--	---	--

Câu 5 (1,5 điểm).

a) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng $\frac{a+bc}{b+c} + \frac{b+ca}{c+a} + \frac{c+ab}{a+b} \geq 2$.

b) Xét hai tập hợp A, B khác $\emptyset$ thỏa mãn $A \cap B = \emptyset$ và $A \cup B = \mathbb{N}^*$. Biết rằng A có vô hạn phần tử và tổng của mỗi phần tử thuộc A với mỗi phần tử thuộc B là phần tử thuộc B . Gọi x là phần tử bé nhất thuộc B thỏa mãn $x \neq 1$. Hãy tìm x .

Ý	Nội dung	Điểm
5a 0,75đ	+ Ta có $\frac{a+bc}{b+c} = \frac{a(a+b+c)+bc}{b+c} = \frac{(a+b)(a+c)}{b+c}$. Tương tự thì BĐT cần chứng minh được viết lại thành $\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2.$	0,25
	+ Theo BĐT Cauchy có $\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} \geq 2 \sqrt{\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} \cdot \frac{(b+c)(b+a)}{c+a}} = 2(a+b) \quad (1)$	0,25
	Tương tự có $\frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c) \quad (2)$ $\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(c+a) \quad (3).$ Cộng về các BĐT (1), (2), (3) suy ra ĐPCM.	0,25
5b 0,75đ	+ Chứng minh $1 \in B$: Giả sử ngược lại, $1 \in A$, khi đó với $x \in B$ có $x+1 \in B$. Có $1 \in A, x+1 \in B$ suy ra $x+2 = 1+(x+1)$ thuộc B. Cứ như vậy có $x, x+1, x+2, \dots$ đều nằm trong B nên suy ra A là tập hữu hạn, mâu thuẫn. Vậy có $1 \in B$.	0,25
	+ Xét $x \geq 4$: Do $1 < x-2 < x$ nên từ tính bé nhất của x trong B suy ra $x-2 \in A$, suy ra $x-1 = (x-2)+1$ thuộc B, điều này lại mâu thuẫn với tính bé nhất của x trong B. Vậy phải có $x = 2$ hoặc $x = 3$.	0,25
	+ Với $x = 2$, cách chọn A là tập các số nguyên dương chia hết cho 3 và B là tập hợp các số nguyên dương không chia hết cho 3 thỏa mãn yêu cầu. Với $x = 3$, cách chọn A là tập hợp các số nguyên dương chẵn và B là tập hợp các số nguyên dương lẻ thỏa mãn yêu cầu. Tóm lại $x = 2$ hoặc $x = 3$.	0,25