

Phú Yên 2021-2022

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - 1 \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x thỏa mãn $\sqrt{\frac{1}{P} - \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

Câu 2. (3,0 điểm) Giải phương trình: $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 1$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(xy + 2z^2)(yz + 2x^2)(xz + 2y^2)}{(2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz)^2} = -1$$

Câu 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AC = 3AD$; trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $HA = 3HE$. Gọi F là giao điểm của ED và BC .

a) Tính tỉ số $\frac{HF}{HC}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{DC}{DF} = \sqrt{\frac{BC}{BF}}$.

Câu 5. (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn $\triangle ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Đường kính AD cắt BC tại E . Gọi M, N tương ứng là các điểm trên cạnh AB, AC thỏa mãn $EM = EB, EN = EC$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt EM, EN tương ứng tại P, Q .

a) Chứng minh $AP = AQ$.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD . Chứng minh $MP \cdot AK = NQ \cdot AH$.

Câu 6. (3,0 điểm) Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$.

a) Chứng minh rằng $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{x + 2y}{\sqrt{1 - x}} + \frac{y + 2x}{\sqrt{1 - y}}$.

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (3,0 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - 1 \right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x thỏa mãn $\sqrt{\frac{1}{P} - \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức P .

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - 1 \right) \\ P &= \left[\frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - (1 - \sqrt{x})}{1 - \sqrt{x}} \right] \\ P &= \left[\frac{2\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{x - \sqrt{x} + 1} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right] \\ P &= \left[\frac{(2\sqrt{x} - 1)(x - \sqrt{x} + 1) + \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(1 - \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(x - \sqrt{x} + 1)} \right] \cdot \frac{1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} \\ P &= \frac{(2\sqrt{x} - 1)[x - \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - x]}{(1 - \sqrt{x})(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{1 - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1} \\ P &= \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{P} = x - \sqrt{x} + 1 \end{aligned}$$

b) Tìm x thỏa mãn $\sqrt{\frac{1}{P} - \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sqrt{\frac{1}{P} - \sqrt{x}} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \sqrt{x - \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x} - 1)^2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow |\sqrt{x} - 1| &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x} - 1 = -\frac{1}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{3}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{4} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{nhận}) \end{aligned}$$

Vậy với $x = \frac{9}{4}, x = \frac{1}{4}$ thỏa mãn $\sqrt{\frac{1}{P} - \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

Câu 2. (3,0 điểm) Giải phương trình: $x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 1$

Lời giải

$$\text{ĐKXĐ: } x \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Ta có } x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{\left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \left|\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{do } \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} = 1 \quad (\text{do } \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

Câu 3. (3,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(xy + 2z^2)(yz + 2x^2)(xz + 2y^2)}{(2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz)^2} = -1$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z, y + z = -x, x + z = -y$$

$$\text{Và có } x + y + z = 0 \Rightarrow 3xyz = x^3 + y^3 + z^3$$

$$\text{Vì } x + y + z = 0 \Leftrightarrow x + y = -z$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^3 = (-z)^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = -z^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = -3x^2y - 3xy^2 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = -3xy(x + y)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = -3xy(-z) \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

Xét tử của biểu thức:

$$\begin{aligned}
& (xy + 2z^2)(yz + 2x^2)(xz + 2y^2) = (xy + z^2 + z^2)(yz + x^2 + x^2)(xz + y^2 + y^2) \\
& = (xy + z^2 - z(x + y))(yz + x^2 - x(y + z))(xz + y^2 - y(x + z)) \\
& = (xy + z^2 - zx - zy)(yz + x^2 - xy - xz)(xz + y^2 - xy - yz) \\
& = (x - z)(y - z)(x - y)(x - z)(x - y)(z - y) \\
& = -[(x - z)(y - z)(x - y)]^2 \\
& = -(xyz - x^2y - xz^2 + x^2z - y^2z + xy^2 + yz^2 - xyz)^2 \\
& = -(-x^2y - xz^2 + x^2z - y^2z + xy^2 + yz^2)^2 \\
& = -[x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - x)]^2
\end{aligned}$$

Xét mẫu của biểu thức:

$$\begin{aligned}
& (2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz)^2 = (2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + x^3 + y^3 + z^3)^2 \\
& = [x^2(2z + x) + y^2(2x + y) + z^2(2y + z)]^2 \\
& = [x^2(z + z + x) + y^2(x + x + y) + z^2(y + y + z)]^2 \\
& = [x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - z)]^2
\end{aligned}$$

Từ đó ta được:

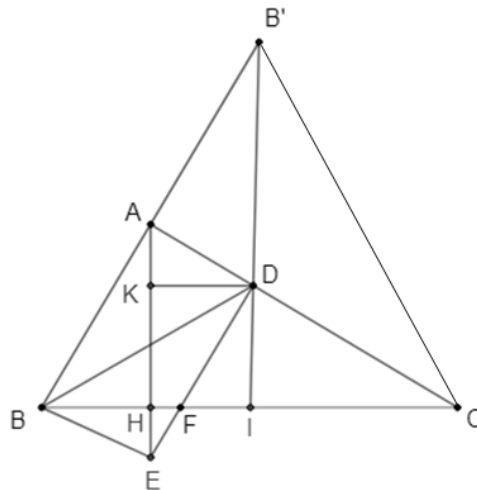
$$\frac{(xy + 2z^2)(yz + 2x^2)(xz + 2y^2)}{(2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz)^2} = \frac{-[x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - x)]^2}{[x^2(z - y) + y^2(x - z) + z^2(y - z)]^2} = -1$$

Câu 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AC = 3AD$; trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho $HA = 3HE$. Gọi F là giao điểm của ED và BC .

a) Tính tỉ số $\frac{HF}{HC}$.

b) Chứng minh rằng $\frac{DC}{DF} = \sqrt{\frac{BC}{BF}}$.

Lời giải



a)

Lấy điểm K trên AH sao cho $AK = HE \Rightarrow HK = 2AK = 2HE; AK = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}KE$.

Xét tam giác AHC có $\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$ nên theo định lí Ta-lét đảo thì $DK \parallel HC$

Xét tam giác DEK có $HK \parallel DK$ nên $\frac{HF}{DK} = \frac{HE}{EK} = \frac{1}{3}$ (hệ quả định lí Ta-lét) (1)

Xét tam giác AHC có $DK \parallel HC$ nên $\frac{DK}{HC} = \frac{AK}{AH} = \frac{1}{3}$ (hệ quả định lí Ta-lét) (2)

Từ (1), (2) suy ra $\frac{HF}{DK} \cdot \frac{DK}{HC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HF}{HC} = \frac{1}{9}$

Vậy $\frac{HF}{HC} = \frac{1}{9}$.

b)

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua A . Khi đó A là trung điểm của BB'

Tam giác BCB' có đường trung tuyến CA và $AC = 3AD$ nên D là trọng tâm của tam giác BCB'

Do đó $B'D$ đi qua trung điểm I của BC , suy ra $CI = \frac{1}{2}BC$

Ta lại có $HA = 3HE$ nên $AE = \frac{4}{3}AH$

Mặt khác $AB.AC = AH.BC$ nên $AB \cdot \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}.AH.BC$

$\Rightarrow AB.CD = \frac{4}{3}AH \cdot \frac{1}{2}BC = AE.CI$

$\Rightarrow \frac{AB}{CI} = \frac{AE}{CD}$

Mà $\widehat{BAE} = \widehat{DCI}$ (cùng phụ với $\widehat{HAC}$)

$\Rightarrow \triangle BAE$ đồng dạng với $\triangle ICD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BEA} = \widehat{IDC}$ (cặp góc tương ứng)

Ta lại có $\widehat{ADB} = \widehat{ADB'} = \widehat{IDC}$

Do đó $\widehat{BEA} = \widehat{ADB}$ nên tứ giác $ABED$ nội tiếp đường tròn $\widehat{BED} + \widehat{BAD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BED} = 90^\circ$ hay tam giác BEF vuông tại E .

Xét tam giác ABC có $AH \perp BC$ nên $AC^2 = BC.HC$ (hệ thức trong tam giác vuông) (3)

Xét tam giác BEF có $EH \perp BF$ nên $EF^2 = BF.HF$ (hệ thức trong tam giác vuông) (4)

Từ (3), (4) suy ra $\frac{AC^2}{EF^2} = \frac{BC.HC}{BF.HF} \Rightarrow \sqrt{\frac{BC}{BF}} = \sqrt{\frac{AC^2}{EF^2} \cdot \frac{HF}{HC}} = \frac{AC}{EF} \cdot \frac{1}{3}$ (*)

Lại có $\frac{AC}{DC} = \frac{3}{2}; \frac{EF}{DF} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AC}{EF} = 3 \cdot \frac{DC}{DF}$ (**)

Từ (*), (**) suy ra $\frac{DC}{DF} = \sqrt{\frac{BC}{BF}}$

Vậy $\frac{DC}{DF} = \sqrt{\frac{BC}{BF}}$.

Câu 5. (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn $\triangle ABC$ ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Đường kính AD cắt BC tại E . Gọi M, N tương ứng là các điểm trên cạnh AB, AC thỏa mãn $EM = EB, EN = EC$. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt EM, EN tương ứng tại P, Q .

a) Chứng minh $AP = AQ$.

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên AD . Chứng minh $MP.AK = NQ.AH$.

Lời giải

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x + y + 2\sqrt{xy} \leq 2$$

$$\text{mà } x + y = 1 \text{ nên } 1 + 2\sqrt{xy} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \leq x + y$$

$$\Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \text{ luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi } x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{b) Ta có } Q = \frac{x+y+y}{\sqrt{1-x}} + \frac{y+x+x}{\sqrt{1-y}} \text{ mà } x+y=1 \text{ nên } Q = \frac{1+y}{\sqrt{y}} + \frac{1+x}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow Q \geq \frac{4}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \text{ (BĐT Svac-xơ)}$$

$$\Rightarrow Q \geq \left(\frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \sqrt{x} + \sqrt{y} \right) + \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow Q \geq 2\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \text{ (BĐT Cô-si và phần a))}$$

$$\Rightarrow Q \geq 3\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy GTNN của } Q \text{ là } 3\sqrt{2} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

---Hết---