

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho a, b là hai số thực dương phân biệt thỏa mãn $(1 - a)(1 - b) + 2\sqrt{ab} = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

b) Biết đa thức $f(x) = x^3 - 23x + 24$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c . Tính giá trị của biểu thức $Q = a^3 + b^3 + c^3$.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+23} - \sqrt{x+7})(\sqrt{6-x} + 2) = 8$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{9}{2} \\ \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{y}\right) = \left(x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

Câu 3 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq 2$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC và F điểm đối xứng của C qua AB. Đường thẳng BE cắt đường thẳng CF tại H.

a) Chứng minh các tứ giác AHB F và AHCE là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Chứng minh F, B, D thẳng hàng và DA là tia phân giác của góc EDF.

c) Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, ACF. Chứng minh sáu điểm B, C, D, O, P, Q cùng thuộc một đường tròn tâm I và giao điểm (khác D) của đường thẳng AD với đường tròn (I) là trực tâm tam giác APQ.

d) Giả sử H thuộc đường tròn (I). Chứng minh các đường thẳng AI, DH, BC, PQ đồng quy.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho p là một số nguyên tố.

a) Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $(x^2 + 1) : p$ thì $(p - 1) : 4$.

b) Chứng minh $2023p + 23^p - 24$ không là số chính phương.

ĐÁP ÁN CHUYÊN NINH BÌNH 2023

Câu 1a. Cho a, b là 2 số thực nguyên dương phân biệt thỏa mãn $(1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a-b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$$

Giải

$$\begin{aligned} * P &= \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - a(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + b(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a-b} \\ &= \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b} - a\sqrt{a} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{a-b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}. \end{aligned}$$

$$* (1-a)(1-b) + 2\sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow 1 - b - a + ab + 2\sqrt{ab} = 1$$

$$\Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b = ab \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{ab})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{ab} & (\text{khi } a > b) \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = -\sqrt{ab} & (\text{khi } a < b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \\ \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = -1 \end{cases}$$

* Vậy $P = 1$ (khi $a > b$) hoặc $P = -1$ (khi $a < b$)

Câu 1b. Biết đa thức $f(x) = x^3 - 23x + 24$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c . Tính giá trị của biểu thức $Q = a^3 + b^3 + c^3$.

Giải

Vì a, b, c là 3 nghiệm của $f(x)$ nên ta có

$$\begin{cases} a^3 - 23a + 24 = 0 \\ b^3 - 23b + 24 = 0 \\ c^3 - 23c + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = 23a - 24 \\ b^3 = 23b - 24 \\ c^3 = 23c - 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q = 23(a + b + c) - 72$$

Theo Viet: $a + b + c = 0$

Do đó $Q = -72$

Câu 2a. GPT $(\sqrt{x+23} - \sqrt{x+7})(\sqrt{6-x} + 2) = 8$ (*)

Giải

ĐK: $-7 \leq x \leq 6$

Với đk trên thì $\sqrt{x+23} + \sqrt{x+7} \neq 0$

$$\text{Do đó (*)} \Leftrightarrow 16(\sqrt{6-x} + 2) = 8(\sqrt{x+23} - \sqrt{x+7})$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{6-x} + 2) = \sqrt{x+23} - \sqrt{x+7}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+23} - 5 + \sqrt{x+7} - 3 + 2(2 - \sqrt{6-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+23}+5} + \frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} + 2 \cdot \frac{x-2}{(2+\sqrt{6-x})} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x+23}+5} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} + \frac{2}{(2+\sqrt{6-x})} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \text{ (do } \frac{1}{\sqrt{x+23}+5} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} + \frac{2}{(2+\sqrt{6-x})} > 0)$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ (t/m đk)}$$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$

Câu 2b. Giải HPT
$$\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{2} \\ \frac{9}{4}+\frac{3}{2}\left(x+\frac{1}{y}\right)=\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

Giải

ĐK: $x \neq 0; y \neq 0$

Đặt $a = x + \frac{1}{y}$, $b = y + \frac{1}{x}$

HPT đã cho trở thành
$$\begin{cases} a+b=\frac{9}{2} & (1) \\ \frac{9}{4}+\frac{3}{2}a=ab & (2) \end{cases}$$

Từ (1): $b = \frac{9}{2} - a$. Thay vào (2):

$$\frac{9}{4} + \frac{3}{2}a = a\left(\frac{9}{2} - a\right) \Leftrightarrow 9 + 6a = 2a(9 - 2a)$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 12a + 9 = 0 \Leftrightarrow (2a - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = 3$$

Vậy
$$\begin{cases} x+\frac{1}{y}=\frac{3}{2} \\ y+\frac{1}{x}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy+2=3y & (3) \\ xy+1=3x & (4) \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 2x$. Thay vào (4):

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x=1 \rightarrow y=2$$

$$x=\frac{1}{2} \rightarrow y=1 \quad (\text{t/m đk})$$

Vậy $(x;y) \in \left\{ (1;2); \left(\frac{1}{2};1\right) \right\}$

Câu 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{c^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{a^3+1}} \geq 2$$

Giải

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$\sqrt{b^3+1} = \sqrt{(b+1)(b^2-b+1)} \leq \frac{b+1+b^2-b+1}{2} = \frac{b^2+2}{2}$$

$$T^2: \sqrt{c^3+1} \leq \frac{c^2+2}{2} ; \sqrt{a^3+1} \leq \frac{a^2+2}{2}$$

$$\text{Do đó VT} \geq \frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2}$$

$$\text{Ta cần CM: } S = \frac{2a}{b^2+2} + \frac{2b}{c^2+2} + \frac{2c}{a^2+2} \geq 2$$

$$\text{Ta có: } \frac{2a}{b^2+2} = \frac{a(b^2+2)-ab^2}{b^2+2} = a - \frac{ab^2}{b^2+2}$$

$$\text{Lại có: } \frac{ab^2}{b^2+2} = \frac{2ab^2}{b^2+b^2+4} \leq \frac{2ab^2}{3^3\sqrt{b^4} \cdot 4} = \frac{a^3\sqrt{2b^2}}{3} \leq \frac{a \cdot (2+b+b)}{9} = \frac{2a \cdot (b+1)}{9}$$

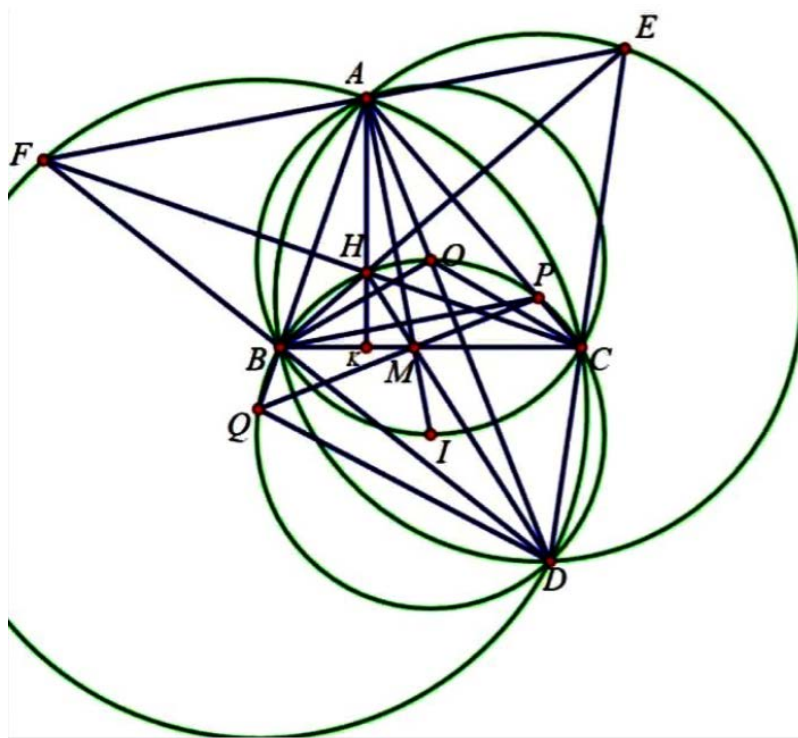
$$T^2 \text{ ta được } S \geq a+b+c - \frac{2 \cdot (a+b+c)}{9} - \frac{2(ab+bc+ca)}{9} = \frac{7 \cdot (a+b+c)}{9} - \frac{2(ab+bc+ca)}{9}$$

$$\text{Ta có } ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$\text{Do đó } S \geq \frac{7 \cdot 6}{9} - \frac{2}{9} \cdot \frac{6^2}{3} = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$. Ta có đpcm.

Câu 4.



a) $\angle AFB = \angle ACB$ (đối xứng); $\angle AHB = \angle KHE$ (đối đỉnh)

Mà $\angle ACB + \angle KHE = 180^\circ$ nên $AHBF$ nội tiếp.

Tương tự với $AHCE$.

b) $\angle AED = \angle AHF$ (cùng bù với $\angle AHC$) mà $\angle AHF = \angle ABF$ (tứ giác $AHBF$ nội tiếp). Do đó $\angle AED = \angle ABF$.

Mặt khác $\angle AED + \angle ABD = 180^\circ$ ($ABDE$ nội tiếp) nên $\angle ABF + \angle ABD = 180^\circ$. Do đó F, B, D thẳng hàng.

Tương tự E, C, D thẳng hàng.

$\angle ADF = \angle ACF$, $\angle ADE = \angle ABE$ mà $\angle ACF = \angle ABE$ (cùng phụ với $\angle BAC$) nên $\angle ADF = \angle ADE$ hay DA là tia phân giác góc EDF .

c) * Dễ thấy P thuộc AC , Q thuộc AB .

* $\angle ADC = \angle AFC$ mà $\angle AFC = \angle ACF = 90^\circ - \angle BAC$ nên $\angle ADC = 90^\circ - \angle BAC$.

Tương tự $\angle ADB = 90^\circ - \angle BAC$. Vậy $\angle BDC = 180^\circ - 2\angle BAC$.

Lại có $\angle BOC = 2\angle BAC$ (góc nội tiếp và góc ở tâm) nên $\angle BDC + \angle BOC = 180^\circ$. Suy ra tứ giác $BOCD$ nội tiếp.

* Tam giác PAB cân tại P nên $\angle APB = 180^\circ - 2\angle BAC$. Suy ra $\angle PAB = \angle BDC$ nên tứ giác $BPCD$ nội tiếp.

Tương tự ta có tứ giác $BQDC$ nội tiếp.

* Vậy 6 điểm B, C, D, O, P, Q cùng thuộc một đường tròn (I) .

* Dễ $CM \perp AD$. Do đó giao điểm khác D của AD và (I) là O .

* Vì OP là đường trung trực của AB nên $OP \perp AB$; OQ là đường trung trực của AC nên $OQ \perp AC$. Vậy O là trực tâm của tam giác APQ .

d) Dễ CM được I là giao điểm của tia phân giác của góc BAC với (O) . Gọi M là giao điểm của AI và BC thì HD , PQ đi qua M . Do đó 4 đường AI, BC, HD, PQ đồng quy tại M .

Câu 5. Cho p là một số nguyên tố.

a) Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $(x^2 + 1) : p$ thì $(p - 1) : 4$.

b) Chứng minh $2023p + 23^p - 24$ không là số chính phương.

Giải

a) Vì p là SNT lẻ nên p chỉ có 1 trong 2 dạng:

$$4k + 1 \text{ hoặc } 4k + 3$$

Vì $(x^2 + 1) : p$ nên p có dạng $4x + 1$, hay $p - 1 = 4k : 4$.

b) Tồn tại STN x sao cho $2023p + 23^p - 24 = x^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 2023p + 23^p - 23$$

Theo Fermat nhỏ, ta có $23^p - 23 \equiv 0 \pmod{p}$

$$\Rightarrow 2023p + 23^p - 23 \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 4k + 1$$

$$\Rightarrow 2023p + 23^p - 24 \equiv -p + (-1)^p \equiv 2 \pmod{4}$$

Mà $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{4}$, mâu thuẫn

Vậy $2023p + 23^p - 24$ không là số chính phương.