

Bài 5 (6,0 điểm). Cho đường tròn tâm O với hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn đó. Điểm A thay đổi trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D là điểm đối xứng với A qua O , tiếp tuyến với đường tròn (O) tại D cắt đường thẳng BC tại điểm K . Đường thẳng KO cắt AB, AC lần lượt tại E và F .

a) Chứng minh DF song song với AB .

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh rằng AI luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Bài 6 (7,0 điểm). Xét $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $1 \leq a < b < c$ thỏa mãn hệ phương trình đồng dư

$$\begin{cases} (b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{a} \\ (c+1)(a+1) \equiv 1 \pmod{b} \\ (a+1)(b+1) \equiv 1 \pmod{c}. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hệ phương trình có vô hạn nghiệm $(a; b; c)$.

b) Giả sử $\gcd(a, b) = 1$. Tìm tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

Bài 7 (7,0 điểm). Cho hàm số $f: \mathbb{I} \rightarrow [0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f^2(x+y) + f^2(x-y) = 2f^2(x) + 2f^2(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{I}.$$

Chứng minh rằng $f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{I}$, (ở đây $f^2(x) = (f(x))^2$).

-----HẾT-----

- Họ và tên thí sinh: SBD:
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.