

Ngày thi: 07/10/2023

Hướng dẫn chấm gồm 08 trang

A) Hướng dẫn chung:

- 1) Học sinh làm đúng đến đâu thì chấm đến đó. Học sinh trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo chấm tương ứng biểu điểm của HDC.
- 2) Việc chi tiết hoá thang điểm phải đảm bảo không làm sai lệch biểu điểm của HDC và phải được thống nhất trong toàn hội đồng chấm thi.
- 3) Điểm của bài thi không làm tròn.

B) Hướng dẫn cụ thể:

Bài 5 (5,0 điểm). Cho n là một số nguyên lớn hơn 4 và p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng đa thức $f(x) = (x+1)^n - px^2 - px + p^2$ không thể phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1.

Ý	Nội dung	Điểm
5	Bổ đề: Đa thức $f(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ khi và chỉ khi $f(x + \alpha)$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$ trong đó α là một số nguyên. Ta sẽ chứng minh đa thức $f(x-1) = x^n - px^2 + px + p^2$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$. Giả sử trái lại $f(x-1) = g(x) \cdot h(x)$ trong đó $g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0,$ $h(x) = b_t x^t + b_{t-1} x^{t-1} + \dots + b_1 x + b_0,$ với a_i, b_j là các số nguyên và $m, t \geq 1, m + t = n$. Ta có $a_m b_t = 1$. Không mất tính tổng quát giả sử $a_m = b_t = 1$.	1,0
	Ta có $a_0 b_0 = p^2$. Xảy ra hai trường hợp sau: Trường hợp 1. Chỉ có duy nhất một trong hai số a_0, b_0 chia hết cho p. Giả sử $a_0 \not\equiv p, b_0 \not\equiv p$. Gọi k là chỉ số bé nhất mà $a_k \not\equiv p$ tức là $a_0 \equiv p, a_1 \equiv p, \dots, a_{k-1} \equiv p$ và $a_k \not\equiv p$. Ta có $k \leq m \leq n-1$. Gọi c_i là hệ số của $f(x-1)$. Với $c_i \leq n-1$ ta có $c_i \equiv p$. Vậy $c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k \equiv p$, mâu thuẫn.	1,0

	Trường hợp 2. Cả hai số a_0, b_0 chia hết cho p. Gọi r là chỉ số bé nhất mà a_r không chia hết cho p và s là chỉ số bé nhất mà b_s không chia hết cho p, tức là $a_0 \vdots p, a_1 \vdots p, \dots, a_{r-1} \vdots p$ và $a_r \nmid p$ và $b_0 \vdots p, b_1 \vdots p, \dots, b_{s-1} \vdots p$ và $b_s \nmid p$. Đặt $v = s + r$. Ta có $c_v = a_r b_s + \sum_{i+j=v} a_i b_j$, trong đó $(i, j) \neq (r, s)$. Ta có với $c_i \leq n - 1$ thì $c_i \vdots p$. Tổng $\sum_{i+j=v} a_i b_j$ trong đó $(i, j) \neq (r, s)$ chia hết cho p nên suy ra $v = n$. Vậy $r + s = n$. Suy ra $r = m, s = t$.	1,0
	Như vậy: $a_0 \vdots p, a_1 \vdots p, \dots, a_{m-1} \vdots p, b_0 \vdots p, b_1 \vdots p, \dots, b_{t-1} \vdots p$. Giả sử $m, t \geq 2$. Ta có $p = c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \vdots p^2$, mâu thuẫn. Vậy phải có $m = 1$ hoặc $t = 1$. Giả sử $m = 1$. Khi đó $g(x)$ có nghiệm nguyên $h \in \mathbb{Z}$. Suy ra $f(x - 1)$ có nghiệm nguyên $h \in \mathbb{Z}$.	1,0
	Ta có $h^n = ph^2 - ph - p^2 \Rightarrow h \neq 0, h \vdots p \Rightarrow h \geq p$. Vì $n > 4, h \geq p$ suy ra $p^2 h^2 \leq h ^4 < h ^n = ph^2 - ph - p^2 \leq ph^2 + p h + p^2$ $\Rightarrow p < 1 + \frac{1}{ h } + \frac{p}{ h ^2} \leq 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{2}{p} \leq 2, \text{ (mâu thuẫn).}$ Vậy điều giả sử là sai, do đó ta có điều phải chứng minh.	1,0

Bài 6 (5,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(xf(y) + y^{2023}) = yf(x) + (f(y))^{2023}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Ý	Nội dung	Điểm
6	Kí hiệu $P(x_0, y_0)$ để chỉ việc thay x bởi x_0, y bởi y_0 trong (1). Trường hợp 1. $f(x)$ là hàm hằng, giả sử $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó: $(1) \Rightarrow f(xc + y^{2023}) = yc + (c)^{2023}, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow c = yc + (c)^{2023}, \forall y \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow c = 0.$ Vậy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, thấy $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thoả mãn.	1,0
	Trường hợp 2. $f(x)$ không là hàm hằng. Ta có $P(x, 0) \Rightarrow f(xf(0)) = (f(0))^{2023}, \forall x \in \mathbb{R}$. Nếu $f(0) \neq 0$ thì $f(x)$ là hàm hằng, mâu thuẫn. Vậy $f(0) = 0$.	

	$P(0, y) \Rightarrow f(y^{2023}) = (f(y))^{2023}, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (*)$ Ta sẽ chứng minh: $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. Thật vậy, giả sử tồn tại số thực $a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0$. Ta có: $P(x, a) \Rightarrow f(xf(a) + a^{2023}) = af(x) + (f(a))^{2023}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow af(x) = f(a^{2023}), \forall x \in \mathbb{R}.$ Suy ra f là hàm hằng, mâu thuẫn. Vậy $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.	1,0
	$P(0, 1) \Rightarrow f(1) = (f(1))^{2023} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = \pm 1 \end{cases}$ ★ Xét $f(1) = 0$: Điều này không thoả mãn do $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$. ★ Xét $f(1) = -1$: $P(x, 1) \Rightarrow f(xf(1) + 1) = f(x) + (f(1))^{2023}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(1 - x) = f(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x) = f(1 - x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$ Đặt $1 - x = t$, khi đó theo (2) ta có $f(1 - t) = f(t) + 1, \forall t \in \mathbb{R}$ hay $f(x) = f(1 - x) - 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (3)$ Từ (2), (3) suy ra vô lý.	1,0
	★ Xét $f(1) = 1$: $P(x, 1) \Rightarrow f(xf(1) + 1) = f(x) + (f(1))^{2023}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f(x + 1) = f(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$ $P(x + 1, y) \Rightarrow f((x + 1)f(y) + y^{2023}) = yf(x + 1) + (f(y))^{2023}$ $= y(f(x) + 1) + (f(y))^{2023} \text{ (theo (4))}$ $= yf(x) + (f(y))^{2023} + y$ $= f(xf(y) + y^{2023}) + y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Với $y \neq 0$, đặt $z = xf(y) + y^{2023}$. Suy ra: $f(z + f(y)) = f(z) + y. \quad (5)$ Chọn $z = 0$, suy ra $f(f(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}. \quad (6)$ Thay y bởi $f(y)$ vào (5) ta có $f(z + f(f(y))) = f(z) + f(y), \forall z, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(z + y) = f(z) + f(y), \forall z, y \in \mathbb{R}.$ Suy ra f cộng tính.	1,0

	Do f cộng tính, kết hợp với $(*)$ ta suy ra: $f(xf(y) + y^{2023}) = f(xf(y)) + f(y^{2023}) = f(xf(y)) + (f(y))^{2023}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Kết hợp với (1), suy ra $f(xf(y)) = yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Thay y bởi $f(y)$ vào kết quả trên, kết hợp với (6) ta có $f(xf(f(y))) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(xy) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Suy ra f là hàm nhân tính. Vậy f là hàm cộng tính, nhân tính và khác hằng nên $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}.$ Thử lại, ta thấy $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ thoả mãn. Vậy có hai hàm thoả mãn yêu cầu bài toán là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R},$ $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$	1,0
--	---	-----

Bài 7 (6,0 điểm). Bộ ba số nguyên dương (a, b, p) , với p là số nguyên tố, được gọi là tốt nếu:

$$(a + b)(a^p + b^p) = 2^a + 2^b.$$

- a) Chứng minh rằng không có bộ (a, b, p) tốt nào trong trường hợp $a \neq b$ và p lẻ.
- b) Tìm tất cả các bộ (a, b, p) tốt.

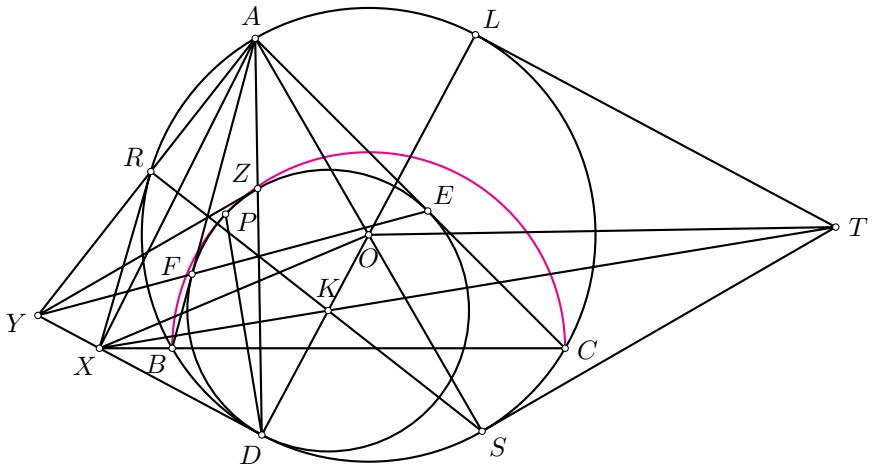
Ý	Nội dung	Điểm
	Do vai trò a, b như nhau, không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > b$. Nếu $a + b$ lẻ thì $a^p + b^p$ lẻ, suy ra $2^a + 2^b$ lẻ, vô lý. Do đó $a + b$ chẵn.	1,0
7.a	★ Nếu a, b cùng lẻ thì theo bổ đề LTE ta có: $b = \nu_2(2^a + 2^b) = \nu_2(a + b) + \nu_2(a^p + b^p) = 2\nu_2(a + b)$ Suy ra b chẵn, vô lý. ★ Nếu a, b cùng chẵn thì $2^a + 2^b \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{3}.$ (1) Do $a^p - a = a(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{3}$ với mọi a và $p \geq 3$ nên $(a + b)(a^p + b^p) \equiv (a + b)^2 \pmod{3}.$ Do $(a + b)^2 \equiv 0 \pmod{3}$ hoặc $(a + b)^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $(a + b)(a^p + b^p) \equiv 0 \pmod{3} \text{ hoặc } (a + b)(a^p + b^p) \equiv 1 \pmod{3} \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra vô lý. Vậy không có bộ (a, b, p) tốt nào trong trường hợp $a \neq b$ và p lẻ.	1,0

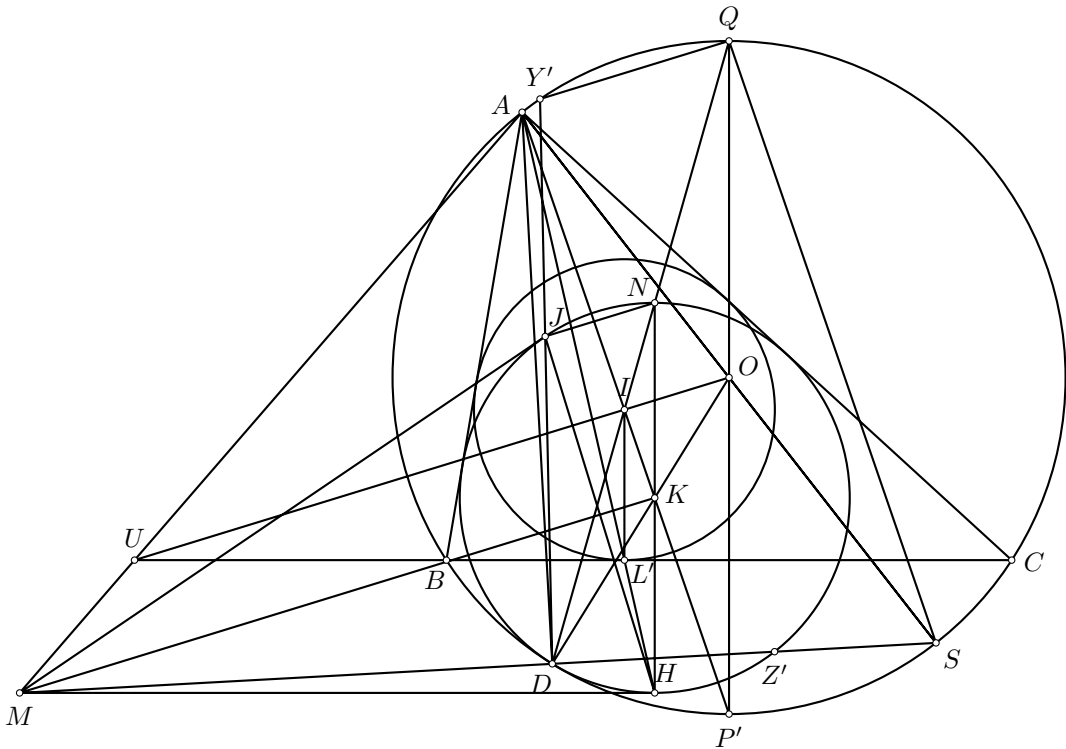
7.b	Trường hợp 1. Xét $a = b$, khi đó phương trình đã cho trở thành: $2 \cdot 2^a = 2 \cdot a \cdot 2 \cdot a^p \Rightarrow 2^{a-1} = a^{p+1} \quad (3)$ Nếu $a > 1$: $a = 2^k$ trong đó k là một số nguyên dương. Từ (3) suy ra $2^{2^k-1} = 2^{k(p+1)} \Rightarrow 2^k - 1 = k(p+1)$.	0,5
	Do $2^k - 1$ lẻ nên $\begin{cases} p = 2 \\ k \text{ lẻ} \end{cases}$	0,5
	Suy ra $0 \equiv k(p+1) = 3k \equiv 2^k - 1 \equiv (-1)^k - 1 \equiv -2 \pmod{3}$, vô lý. Suy ra $a = b = 1$ và p bất kì.	0,5
	Trường hợp 2. Xét $a > b$. Theo trường hợp a) thì p không là số nguyên tố lẻ, suy ra $p = 2$. $2^a < 2^a + 2^b = (a+b)(a^2 + b^2) < 2 \cdot a \cdot 2 \cdot a^2$ $\Rightarrow 2^a \leq 2^2 \cdot a^3 \Rightarrow 2^{a-2} \leq a^3 \Rightarrow 1 \leq a \leq 13$	0,5
	★ Nếu a, b cùng lẻ thì $b = \nu_2(2^a + 2^b) = \nu_2(a+b) + 1 \Rightarrow 2^{b-1} a+b$ $\Rightarrow 2^{b-1} \leq a+b < 2a \leq 26 \Rightarrow b \leq 5$ Lại có $b-1 = \nu_2(a+b) \geq 1 \Rightarrow b \geq 2$. Do b lẻ nên $b \in \{3; 5\}$. Xét $b = 5$, $2^4 a+5 \Rightarrow 16 a+5 \Rightarrow a = 11$. Thử lại trong trường hợp này ko thoả mãn. Xét $b = 3$, $2^2 a+3 \Rightarrow 4 a+3 \Rightarrow a \in \{5; 9; 13\}$. Khi đó $\nu_2(a+b) = b-1 = 2 \rightarrow a = 9$. Thử lại trong trường hợp này không thoả mãn.	0,5
	★ Nếu a, b cùng chẵn thì $2^a + 2^b \equiv 2 \pmod{3}$. Do đó $3 \nmid a+b$ và $3 \nmid a^2 + b^2$. • Nếu $3 \nmid ab$ thì ta có hai tình huống: Tình huống 1. $a = 3k+1, b = 3l+1$: Khi đó $(a+b)(a^2 + b^2) \equiv 1 \pmod{3}$ (vô lý) Tình huống 2. $a = 3k+2, b = 3l+2$: Do $a = 3k+2$ chẵn và $1 \leq a \leq 13$ nên $a \in \{2; 8\}$. + Xét $a = 2$ và $1 \leq b < a$, b chẵn, khi đó không có giá trị b. + Xét $a = 8$ và $1 \leq b < a$, b chẵn, suy ra $b = 2$. Thử lại không thoả mãn. • Nếu $3 ab \Rightarrow \begin{cases} 3 a \\ 3 b \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow a+b \equiv 2 \pmod{3}$. Mà $a, b \in \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$, suy ra một trong hai số a, b phải là 6 hoặc 12.	

+ Nếu $a = 6$ thì $b = 2$. Thử lại không thoả mãn. + Nếu $b = 6$ thì $a = 8$. Thử lại không thoả mãn. + Nếu $a = 12$ thì $b = 8, b = 2$. Thử lại không thoả mãn. + Nếu $b = 12$ thì không có giá trị nào của a. Vậy $(a, b) = (1, 1)$ và p là số nguyên tố bất kì thoả mãn yêu cầu bài toán.	0,5
---	-----

Bài 8 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , đường kính AS . Đường tròn (K) tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại E, F và tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại D . Tiếp tuyến tại S của đường tròn (O) cắt đường trung trực của đoạn thẳng AD tại T . Gọi P là điểm đối xứng của D qua đường thẳng TK .

- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tiếp xúc với đường tròn (K) .
- Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , Δ là đường thẳng vuông góc với AD tại D , Δ' là tiếp tuyến song song với BC của đường tròn (K) (Δ' nằm cùng phía với D so với BC). Trong trường hợp Δ cắt Δ' , gọi M là giao điểm của hai đường thẳng đó. Chứng minh rằng ba đường thẳng AM, BC, OI đồng quy.

Ý	Nội dung	Điểm
		
8.1	Xét thể hình trên đây. Tiếp tuyến tại D của (K) cắt BC tại X. SK cắt (O) tại R. AD cắt (K) tại điểm thứ hai Z. Do DZ, EA, FA đồng quy nên tứ giác $DFZE$ điều hòa, suy ra các tiếp tuyến tại Z, D của (K) cắt nhau tại Y trên EF. Do đó $\mathcal{P}_{Y/(O)} = YD^2 = \overline{YF} \cdot \overline{YE} = \mathcal{P}_{Y/(AEF)}$ nên Y thuộc trục đẳng phương của (AEF) và (O). Mà $\widehat{ARK} = 90^\circ$ nên R thuộc (AEF) nên A, R, Y thẳng hàng.	1,0

	Từ đó $A(RD, FE) = -1$ nên tứ giác $RBDC$ điều hòa, suy ra các tiếp tuyến tại R, D của (O) cắt nhau trên BC hay XR tiếp xúc (O). Gọi L là giao điểm khác D của DO với (O) thì TL tiếp xúc với (O). Theo định lí Newton, DL, RS, XT đồng quy hay XT đi qua K. Do đó P đối xứng với D qua XK hay (PBC) tiếp xúc với (K).	1,0
8.2		
	Xét thể hình trên đây. Bổ đề: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), và ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn (K) tiếp xúc với CA, AB và tiếp xúc trong với (O) tại D. Q là điểm chính giữa cung BAC của (O). Khi đó D, I, Q thẳng hàng. Bổ đề trên là một tính chất quen thuộc của đường tròn Mixtilinear. Gọi H là tiếp điểm của đường tròn (K) và đường thẳng qua M song song với BC. L' là hình chiếu của I lên BC. N là điểm đối xứng của H qua K, P' là giao điểm thứ hai của AI với (O). Q là giao điểm thứ hai của $P'O$ với (O). J là điểm đối xứng của H qua MK. Y' là giao điểm thứ hai của DJ với (O). Z' là giao điểm thứ hai của MD với (K). U là giao điểm của OI với BC.	1,0
	Để thấy $\overrightarrow{OP'} \uparrow \uparrow \overrightarrow{KH}$. Từ đó, chú ý rằng D là tâm của phép vị tự ngoài biên (K) thành (O), suy ra D, H, P' thẳng hàng. Để thấy $\widehat{ADS} = \widehat{ADM} = 90^\circ$, do đó M, D, S thẳng hàng. Kết hợp với $Z' \in DM$, suy ra D, Z', S thẳng hàng.	

Để thấy MJ là tiếp tuyến của (K), do đó tứ giác $HDJZ'$ điều hoà. Để thấy $IL' \parallel P'Q$ và $OP' = OQ$, do đó $I(L'OP'Q) = -1$. Vậy $Q(P'Y'SD) = D(P'Y'SD) = D(HJZ'D) = -1 = I(L'OP'Q)$. Để thấy $QP' \parallel IL'$; $QS \parallel AP' \equiv IP'$. Theo bổ đề trên, ba điểm D, I, Q thẳng hàng, do đó $QY' \parallel OI$. (1)	1,0
Để thấy $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KN}$. Từ đó, chú ý rằng D là tâm của phép vị tự ngoài biến (K) thành (O), suy ra D, N, Q thẳng hàng. Vậy qua phép vị tự tâm D biến (O) thành (K), Q, Y' theo thứ tự biến thành N, J. Do đó $QY' \parallel NJ$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $IO \parallel NJ$. Kết hợp với $MK \perp HJ, HJ \perp NJ$, suy ra $UI \equiv IO \parallel MK$. Kết hợp với $MH \parallel UL', KH \parallel IL'$, suy ra tam giác MHK và $UL'I$ có các cạnh tương ứng song song. Vậy MU, HL', KI đồng quy. (3) Để thấy $\overrightarrow{IL'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KH}$. Từ đó, chú ý rằng A là tâm của phép vị tự ngoài biến (I) thành (K), suy ra A, L', H thẳng hàng. Do đó $A = HL' \cap KI$. Suy ra điều phải chứng minh	1,0

————HẾT————