

Câu 1 (2,0 điểm).

a. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là các giao điểm của (C) với các trục tọa độ. Tìm trên (C) các điểm M có tọa độ nguyên sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 8 (đvdt).

b. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left| \frac{1}{12} \sin 3x + \cos^2 x - \frac{1}{4} \sin x - m \right|$ bằng 1.

Câu 2 (2,0 điểm).

a. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\sqrt[3]{\log u_{19} - \log u_1} + \sqrt{\log u_{19} - \log u_1 + 3} = 3$ và $u_{n+1} = u_n + 2$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n sao cho $(\sqrt{2})^{u_n} = 4^{2020}$.

b. Cho $f(x) = \frac{2020^x}{2020^x + \sqrt{2020}}$. Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2020}{2021}\right)$.

Câu 3 (2,0 điểm).

a. Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{2020}$ nội tiếp đường tròn (O) , chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh bất kỳ của đa giác đó. Tính xác suất để nhận được một tam giác tù.

b. Chứng minh rằng $(C_{2020}^1)^2 + (2C_{2020}^2)^2 + (3C_{2020}^3)^2 + \dots + (2020C_{2020}^{2020})^2 = 2020^2 C_{4038}^{2019}$.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho tứ diện $ABCD$ và hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC sao cho $2AM = BM, 2CN = AN$. Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm M, N và song song với cạnh AD , cắt các cạnh BD và CD lần lượt tại K và L .

a. Gọi V là thể tích của khối tứ diện $ABCD$. Tính thể tích khối đa diện $BCMNLK$ theo V .

b. Giả sử tứ diện $ABCD$ có $BC = x (0 < x < \sqrt{3})$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Tìm x để thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (1,0 điểm).

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n lớn hơn 1, ta luôn có

$$\ln \frac{n+1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \log_2 \frac{n+1}{2}.$$

-----HẾT-----