

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH YÊN BÁI**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS
NĂM HỌC 2020 – 2021**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN**

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **12/03/2021**

Câu 1. (4,0 điểm)

1) Tính giá trị của biểu thức $A = (1 - x^5 + x^7)^{2021}$, biết $x = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{12}}$

2) Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : \left[\left(\frac{1-\sqrt{x^3}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \right]$

Với $x \geq 0; x \neq 1$. Chứng minh rằng $M = x \left(B - \frac{1}{2} \right) \leq 0$

Câu 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{x+4} + 2020\sqrt{x+3} = 2020 + \sqrt{x^2 + 7x + 12}$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + 3y = 5xy \\ x^2 + y^2 = 5xy^2 \end{cases}$

Câu 3. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại C, nội tiếp đường tròn tâm (O) (CA > CB). Lấy M là điểm chính giữa của cung nhỏ AC. Các đường thẳng AM và BC cắt nhau tại I, các đường thẳng AC và BM cắt nhau tại K.

1) Chứng minh $\triangle ABI$ cân và tứ giác MICK nội tiếp.

2) Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại N. Chứng minh đường thẳng NI là tiếp tuyến của (B;BA) và $NI \perp MO$

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIK cắt đường tròn (B;BA) tại D (D không trùng với I). Chứng minh rằng 3 điểm A, C, D thẳng hàng.

Câu 4. (4,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 = y^2 + 4y + 1$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho hai số $n+50$ và $n-11$ đều là lập phương của hai số nguyên dương nào đó.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2}$

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – YÊN BÁI (2020 – 2021)

Câu 1.

$$1) \text{ Biến đổi } x \text{ ta được: } x = \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{|\sqrt{3}+1| + |\sqrt{3}-1|}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} = 1$$

$$\text{Suy ra: } A = (1 - x^5 + x^7)^{2021} = (1 - 1^5 + 1^7)^{2021} = 1$$

2) Rút gọn B:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : [(x + \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x})(x + 1 - 2\sqrt{x})] \\ &= \frac{\sqrt{x}(1-x)^2}{1+x} : (1-x)^2 \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x+1} \end{aligned}$$

Từ đó thay B vào biểu thức của M dễ dàng suy ra điều phải chứng minh

Câu 2.

1) Điều kiện $x \geq -3$

Phương trình tương đương với:

$$2020(\sqrt{x+3}-1) = \sqrt{x+3}(\sqrt{x+4}-1)$$

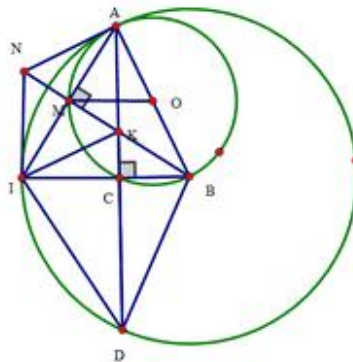
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}-1=0 \\ \sqrt{x+4}-1=2020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2021^2-4 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện thì cả 2 giá trị của x đều thỏa mãn

Kết luận: $x = -2$; $x = 2021^2 - 4$

$$2) \text{ Đáp số: } (x; y) = (0; 0) = \left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right) = \left(1; \frac{1}{2}\right)$$

Câu 3.



1) M là chính giữa của $\widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AM} = \widehat{MC} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau)

Ta có $\widehat{BMA} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét $\triangle BAI$ có BM là đường cao đồng thời là đường phân giác nên $\triangle BAI$ cân tại B

Xét tứ giác MICK ta có: $\widehat{IMK} + \widehat{KCI} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà $\widehat{IMK}$ và $\widehat{KCI}$ là hai góc nhọn đối nhau

Vậy tứ giác MICK nội tiếp

2) Ta có $\triangle BAI$ cân tại I $\Rightarrow BA = BI \Rightarrow I \in (B, BA)$ (1)

Xét $\triangle NIA$ có NM là đường cao đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle NIA$ cân tại N

$$\Rightarrow \widehat{NAI} = \widehat{NIA}$$

Mà $\widehat{AIB} = \widehat{BAI}$ (Vì $\triangle BAI$ cân)

$$\Rightarrow \widehat{NIA} + \widehat{AIB} = \widehat{NAI} + \widehat{IAB} = 90^\circ \text{ (Vì } BA \perp NA \text{ do NA là tiếp tuyến)}$$

$$\Rightarrow BI \perp IN \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra: NI là tiếp tuyến của (B;BA)

Ta lại có: $NI \perp BC, AC \perp BC \Rightarrow NI \perp AC$, mà $AC \perp MO$ (dễ dàng chứng minh)

$$\Rightarrow NI \perp MO$$

3) Xét đường tròn (B;BA) ta có $\widehat{IDA} = \frac{1}{2} \widehat{IBA}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm)

$$\widehat{IBN} = \frac{1}{2} \widehat{IBA} \Rightarrow \widehat{IDA} = \widehat{IBN}$$

Mà $\widehat{IBN} = \widehat{IDK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IK)

$\Rightarrow \widehat{IDA} = \widehat{IDK} \Rightarrow$ Hai tia DA và DK phải trùng nhau (mà A, K, C thẳng hàng) hay ba điểm A, C, D thẳng hàng

Câu 4.

1) Ta có: $x^4 = y^2 + 4y + 1 \Leftrightarrow x^4 = (y+2)^2 - 3 \Leftrightarrow (x^2 - y - 2)(x^2 + y + 2) = -3$

Ta có bảng sau:

$x^2 - y - 2$	-3	-1	1	3
$x^2 + y + 2$	1	3	-3	-1
$x^2 - y$	-1	1	3	5
$x^2 + y$	-1	1	-5	-3
x	Vô nghiệm	± 1	Vô nghiệm	± 1
y	0	0	-4	-4

Vậy nghiệm: $(x;y)=(1;0)=(-1;0)=(1;-4)=(-1;-4)$

2) Gọi $n+50=x^3$; $n-11=y^3$ ($x^3 > y^3$ nên $x > y > 0$), ta có:

$$(n+50)-(n-11)=x^3-y^3$$

$$\Leftrightarrow 61 = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$\Rightarrow x-y=1 \text{ và } x^2+xy+y^2=61$$

Giải ra ta được: $y=5, x=6$

Suy ra: $n=166$.

Câu 5.

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y^2+z^2} = \frac{x}{1-x^2} = \frac{x^2}{x(1-x^2)}$$

$$\text{Đặt: } A = x(1-x^2) \Rightarrow 2A^2 = 2x^2(1-x^2)(1-x^2)$$

$$\text{Theo AM - GM: } 2A^2 \leq \left(\frac{2x^2 + 1 - x^2 + 1 - x^2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y^2 + z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

$$\text{Tương tự: } \frac{y}{z^2 + x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} y^2, \frac{z}{x^2 + y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} z^2$$

$$\text{Suy ra: } P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ hay MinP} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$