SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÀ NAM
NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: **TOÁN** (chuyên)
Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian phát đề)*

Câu I ***(2,0 điểm)*** .Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}\right)$ với $x\geq 0, x\neq 1, x\neq 4.$

1. Rút gọn biểu thức $A.$

2.Tìm tất cả các số nguyên của x để $|2A-1|+1=2A.$

Câu II ***(2,0 điểm).***

1. Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4.$

2.Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y \quad (1)\\ \sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2 \quad (2)\end{cases}.$

Câu III. ***(1,0 điểm)*** Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.

Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}\right)$ với $x\geq 0, x\neq 1, x\neq 4.$

Câu IV. ***(4 điểm)*** Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB<AC.$ Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác $ABC.$ Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O).

1. Chứng minh $\widehat{BAD}=\widehat{CAE}.$

2. Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD=HK.HM$.

3. Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.

4.Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu V. ***(1,0 điểm)***Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\frac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\frac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}.$$

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học: 2023-2024
(Hướng dẫn chấm thi có 06 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)

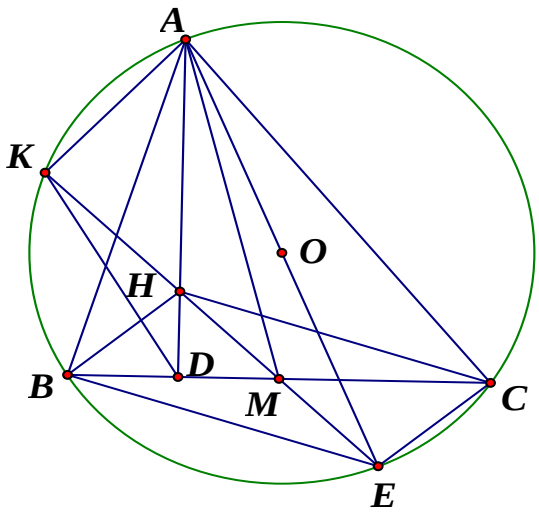
Ghi chú:

- Điểm toàn bài không làm tròn.
- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

Nội dung	Điểm
Câu I ***(2,0 điểm)*** **.**	
Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}\right)$ với $x\ge 0, x\ne 1, x\ne 4.$ 1.***(1,5 điểm)*** Rút gọn biểu thức $A.$	
$A=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{1+\sqrt{x}+x}.\left[\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]$	**0,5**
$=\dfrac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{1+\sqrt{x}+x}.\left[\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]$	**0,25**
$=\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$	**0,25**
$=\left(\sqrt{x}-1\right)\dfrac{2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$	**0,25**
$=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}.$	**0,25**
2.***(0,5 điểm)*** Tìm tất cả các số nguyên của x để $\left\|2A-1\right\|+1=2A.$	
+) $\left\|2A-1\right\|+1=2A\Leftrightarrow\left\|2A-1\right\|=2A-1\Leftrightarrow 2A-1\ge 0\Leftrightarrow A\ge\dfrac{1}{2}$	**0,25**
+) $\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}\ge\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}\le 3\Leftrightarrow x\le 9$ Kết hợp với điều kiện $x\ge 0; x\ne 1; x\ne 4\Rightarrow x\in\{0;2;3;5;6;7;8;9\}$	**0,25**

Câu II ***(2,0 điểm).***	
1.***(1,0 điểm)*** Giải phương trình $(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4.$	
$(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=2x^2-6x+4\Leftrightarrow(x-1)\sqrt{x^2+6x+16}=(x-1)(2x-4)$ $\Leftrightarrow(x-1)(\sqrt{x^2+6x+16}-2x+4)=0$	**0,25**
+) $x-1=0\Leftrightarrow x=1$	**0,25**
+) $\sqrt{x^2+6x+16}=2x-4\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4\ge0\\x^2+6x+16=(2x-4)^2\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge2\\3x^2-22x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge2\\\left[\begin{array}{l}x=0(l)\\x=\frac{22}{3}(tm)\end{array}\right.\end{cases}$	**0,25**
Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1;x=\frac{22}{3}$	**0,25**
2.***(1,0 điểm)*** Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^3+xy(2y-x)+2x^2+6x=xy+y^3+3y\quad(1)\\\sqrt{3(x^2+y)+7}+\sqrt{5x^2+5y+14}=4-y-x^2\quad(2)\end{cases}.$	
Điều kiện: $\begin{cases}3(x^2+y)+7\ge0\\5x^2+5y+14\ge0\end{cases}$ Phương trình (1) tương đương với $2x^3+2xy^2-x^2y+2x^2+6x=xy+y^3+3y$ $\Leftrightarrow(2x^3-x^2y)+(2xy^2-y^3)+(2x^2-xy)+(6x-3y)=0$ $\Leftrightarrow x^2(2x-y)+y^2(2x-y)+x(2x-y)+3(2x-y)=0$ $\Leftrightarrow(2x-y)(x^2+y^2+x+3)=0$	**0,25**
$\Leftrightarrow(2x-y)[(x+\frac{1}{2})^2+y^2+\frac{11}{4}]=0$ $\Leftrightarrow2x-y=0\Leftrightarrow y=2x$	**0,25**
Thay $y=2x$ vào phương trình (2) ta được	

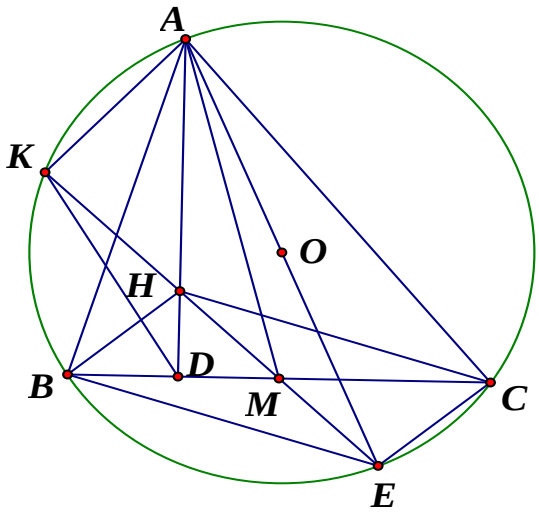
$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$ $\Leftrightarrow(\sqrt{3x^2+6x+7}-2)+(\sqrt{5x^2+10x+14}-3)+(x^2+2x+1)=0$ $\Leftrightarrow\frac{3(x+1)^2}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\frac{5(x+1)^2}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+(x+1)^2=0$ $\Leftrightarrow(x+1)^2(\frac{3}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\frac{5}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+1)=0$	**0,25**
Vì $\frac{3}{\sqrt{3x^2+6x+7}+2}+\frac{5}{\sqrt{5x^2+10x+14}+3}+1>0$ nên phương trình tương đương với $(x+1)^2=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=-2\ (tm)$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;-2)$	**0,25**
Câu III. ***(1,0 điểm)*** Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương.	
Giả sử số tự nhiên n thỏa mãn đề bài. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $2^{2024}+2^{2027}+2^n=k^2\Leftrightarrow 9.2^{2024}+2^n=k^2\Leftrightarrow\left(k+3.2^{1012}\right)\left(k-3.2^{1012}\right)=2^n$.	**0,25**
$\Rightarrow\begin{cases}k+3.2^{1012}=2^a\\k-3.2^{1012}=2^b\\a,b\in\mathbb{N},a+b=n\end{cases}\Rightarrow 2^a-2^b=3.2^{1013}$.	**0,25**
$\Leftrightarrow 2^b(2^{a-b}-1)=3.2^{1013}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{a-b}-1=3\\2^b=2^{1013}\end{cases}$	**0,25**
$\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=2\\b=1013\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1015\\b=1013\end{cases}\Rightarrow n=2028$ Vậy với $n=2028$ thì $2^{2024}+2^{2027}+2^n$ là số chính phương	**0,25**
Câu IV. ***(4 điểm)*** Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và không đi qua tâm O. Gọi A là điểm di động trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB<AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và H là trực tâm tam giác ABC. Tia MH cắt đường tròn (O) tại K, đường thẳng AH cắt cạnh BC tại D và AE là đường kính của đường tròn (O).	



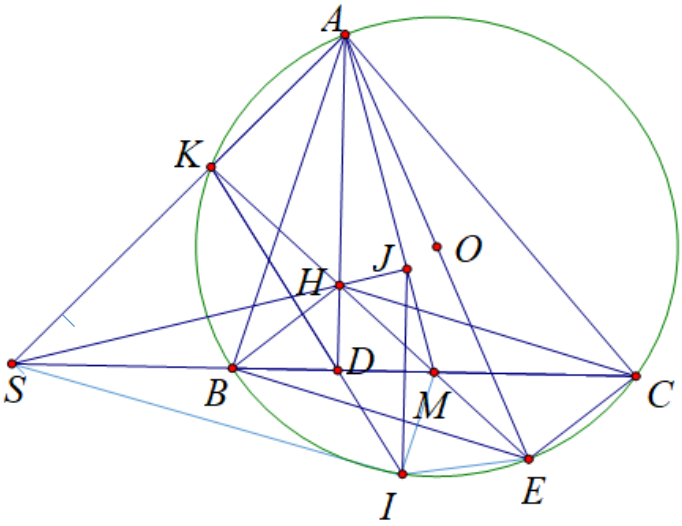
1. (1,0 điểm) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.

$AH \perp BC \Rightarrow \widehat{ADB} = 90^0$ $\widehat{ABE} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	**0,25**
Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CBE}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$)	**0,25**
Mà $\widehat{CBE} = \widehat{CAE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)	**0,25**
Suy ra $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$.	**0,25**

2. (1,0 điểm) Chứng minh rằng tứ giác $BHCE$ là hình bình hành và $HA.HD = HK.HM$.

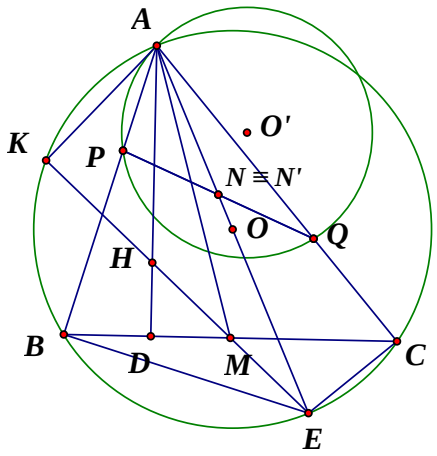


Ta có $\widehat{ACE} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow EC \perp AC$. Mà H là trực tâm tam giác ABC $\Rightarrow BH \perp AC$. Từ đó suy ra $EC \,//\, BH$. Tương tự $HC \,//\, BE$	**0,25**
Xét tứ giác $BHCE$ có $EC \,//\, BH$ và $HC \,//\, BE$ nên tứ giác $BHCE$ là hình bình hành.	**0,25**
Mà M là trung điểm của BC nên ba điểm H, M, E thẳng hàng.	

Lại có ba điểm M, K, H thẳng hàng. Từ đó suy ra ba điểm K, H, E thẳng hàng. Ta có $\widehat{AKE} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AKM} = 90°$. Xét ΔAKH và ΔMDH có: $\widehat{AKM} = \widehat{MDH} (= 90°)$; $\widehat{KHA} = \widehat{DHM}$ (hai góc đối đỉnh).	**0,25**
$\Rightarrow \Delta AKH \square \Delta MDH \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{HA}{HM} = \dfrac{HK}{HD} \Rightarrow HA.HD = HK.HM$.	**0,25**
3. (1,0 điểm) Tia KD cắt đường tròn (O) tại I (I khác K), đường thẳng đi qua I và vuông góc với đường thẳng BC cắt AM tại J. Chứng minh rằng các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua một điểm.	
	
Kéo dài AK cắt đường thẳng BC tại S, ΔSAM có hai đường cao AD và MK cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm tam giác SAM. Xét tam giác ΔHDM và ΔSDA có $\widehat{ADS} = \widehat{HDM} = 90°$ và $\widehat{DMH} = \widehat{DAS}$ (cùng phụ với $\widehat{ASM}$). $\Rightarrow \Delta HDM \square \Delta SDA \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{HD}{DM} = \dfrac{DS}{AD}$. (1) Tương tự H là trực tâm $\Delta ABC \Rightarrow \Delta BDH \square \Delta ADC \Rightarrow \dfrac{BD}{HD} = \dfrac{AD}{CD}$. (2)	**0,25**
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{HD}{DM}.\dfrac{BD}{HD} = \dfrac{DS}{AD}.\dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \dfrac{BD}{DM} = \dfrac{DS}{CD} \Rightarrow BD.CD = DM.DS$ (3) Mà $\Delta BDK \square \Delta IDC \ (g.g) \Rightarrow \dfrac{BD}{ID} = \dfrac{DK}{DC} \Rightarrow BD.CD = DI.DK$ (4)	**0,25**
Từ (3) và (4) $\Rightarrow DI.DK = DM.DS$ nên $SKMI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{SMI} = \widehat{SKI}$. Mà $AKDM$ là tứ giác nội tiếp (do $\widehat{AKM} = \widehat{ADM} = 90°$) $\Rightarrow \widehat{SKI} = \widehat{DMA}$. Từ đó suy ra $\widehat{SMI} = \widehat{DMA}$.	

Xét ΔMIJ có $\widehat{SMI}=\widehat{DMA}$ và $IJ\perp BC\Rightarrow BC$ là đường trung trực của IJ.	**0,25**
$\Rightarrow \widehat{SJM}=\widehat{SIM}=90^\circ$ (vì $SKMI$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{SIM}=180^\circ-\widehat{SKM}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$) $\Rightarrow SJ\perp AM$. Mà H là trực tâm $\Delta SAM\Rightarrow SH\perp AM$. Từ đó suy ra ba điểm S, H, J thẳng hàng. Vậy các đường thẳng AK, BC và HJ cùng đi qua điểm S.	**0,25**

4. ***(1,0 điểm)*** Một đường tròn thay đổi luôn tiếp xúc với AK tại A và cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại P, Q phân biệt. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh rằng đường thẳng AN luôn đi qua một điểm cố định.



Gọi N' là giao điểm của PQ và AE. Xét $\Delta AQN'$ và ΔBEM có: $\widehat{QAN'}=\widehat{EBM}$; $\widehat{AQN'}=\widehat{KAP}=\widehat{BEM}$ $\Rightarrow \Delta AQN' \square \Delta BEM\ (g.g)\Rightarrow \dfrac{AN'}{QN'}=\dfrac{BM}{EM}$ (5)	**0,25**
Do $\widehat{QAN'}=\widehat{EBM}$; $\widehat{AQN'}=\widehat{KAP}=\widehat{BEM}$ nên theo tính chất góc ngoài của $\Delta AQN'$ và ΔBEM ta có $\widehat{EMC}=\widehat{PN'A}$.	**0,25**
Mà $\widehat{PAN'}=\widehat{ECM}$ nên $\Delta ECM \square \Delta PAN'(g.g)\Rightarrow \dfrac{CM}{EM}=\dfrac{AN'}{PN'}$. (6)	**0,25**
Từ (5) và (6) và kết hợp $BM=CM\Rightarrow \dfrac{AN'}{QN'}=\dfrac{AN'}{PN'}\Rightarrow QN'=PN'\Rightarrow N\equiv N'$. Vậy AN luôn đi qua một điểm cố định O.	**0,25**

Câu V. ***(1,0 điểm)*** Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P=\dfrac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}$.

Với $a,b,c>0$, chứng minh được: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow \frac{1}{a+b+c}\le\frac{1}{9}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ $(x+y+z)^2\le 3(x^2+y^2+z^2)\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\sqrt{3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}$	**0,25**
Với $a,b>0$, ta có : $5a^2+2ab+2b^2=(4a^2+4ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)$ $=(2a+b)^2+(a-b)^2\ge(2a+b)^2$ $\Rightarrow\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}\ge\sqrt{(2a+b)^2}=2a+b$	**0,25**
$\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{5a^2+2ab+2b^2}}\le\dfrac{1}{2a+b}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ Tương tự: $\dfrac{1}{\sqrt{5b^2+2bc+2c^2}}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$; $\dfrac{1}{\sqrt{5c^2+2ca+2a^2}}\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$	**0,25**
$P\le\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\Rightarrow P\le\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)}=\dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=c\\\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$ Vậy $\max P=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.	**0,25**

--HẾT--