

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẮK LẮK
ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 1 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN - THCS
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 26/3/2024

Bài 1. (4,0 điểm)

- 1) Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 - 2x + 23$, với $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$.
- 2) Trong mặt phẳng (Oxy) , cho đường thẳng $(d): y = (m - 2)x + m + 1$ (m là tham số) và parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$. Chứng minh rằng với mọi số thực m đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 2. (4,0 điểm)

- 1) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \neq 0$ và $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và tìm giá trị nhỏ nhất của $|x_1 - x_2|$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 + 2x^2 + 3y - 4x - 3xy + 2 = 0 \\ \sqrt{y - x + 1} + \sqrt{x^2 - y + 3} - 2 = 0 \end{cases}$$

Bài 3. (4,0 điểm)

- 1) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab}$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng: Nếu b là số lẻ thì a là số chính phương.

- 2) Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài các cạnh là số nguyên dương và số đo chu vi bằng số đo diện tích.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi P là điểm chính giữa cung CD không chứa hai điểm A và B . Tia AP cắt đường thẳng BC tại E , tia BP cắt đường thẳng AD tại F .

- 1) Gọi M, N lần lượt là giao điểm của PA và PB với CD . Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên một đường tròn và đường thẳng OP vuông góc với EF .

2) Chứng minh $\left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = \frac{PE}{PA} \cdot \frac{PF}{PB}$.

3) Chứng minh $\frac{EF}{BA} + \frac{BA}{EF} + \frac{AF}{BE} + \frac{BE}{AF} \leq \frac{PE}{PA} + \frac{PA}{PE} + \frac{PF}{PB} + \frac{PB}{PF}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Trong một hình tròn bán kính $46cm$ người ta đặt 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $1cm$ mà không chứa điểm nào trong 2024 điểm đã cho.

Bài 6. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{x + y + z}}.$$

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH ĐẮK LẮK

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

NĂM HỌC 2023-2024

Môn: TOÁN - THCS

Thời gian: 150 phút (không kể giao đề)

Ngày thi: 26/3/2024

Bài 1. (4,0 điểm)

- Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 - 2x + 23$, với $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$
- Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m-2)x + m + 1$, (m là tham số) và Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$. Chứng minh rằng với mọi số thực m đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 2. (4,0 điểm)

- Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $|x_1 - x_2|$.
- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 + 2x^2 + 3y - 4x - 3xy + 2 = 0 \\ \sqrt{y - x + 1} + \sqrt{x^2 - y + 3} - 2 = 0 \end{cases}$$

Bài 3. (4,0 điểm)

- Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn $\frac{(a+b)^2 + 4a}{ab}$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng nếu b là số lẻ thì a là số chính phương.
- Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài các cạnh là các số nguyên dương và số đo chu vi bằng số đo diện tích.

Bài 4. (4,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , Gọi P là điểm chính giữa của cung CD không chứa hai điểm A và B . Tia AP cắt đường thẳng BC tại E . Tia BP cắt đường thẳng AD tại F .

- Gọi M, N lần lượt là giao điểm của PA, PB với CD . Chứng minh rằng bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên một đường tròn và đường thẳng OP vuông góc với EF .
- Chứng minh $\left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = \frac{PE}{PA} \cdot \frac{PF}{PB}$
- Chứng minh $\frac{EF}{AB} + \frac{AB}{EF} + \frac{AF}{BE} + \frac{BE}{AF} \leq \frac{PE}{PA} + \frac{PA}{PE} + \frac{PF}{PB} + \frac{PB}{PF}$.

Bài 5. (2,0 điểm)

Trong hình tròn bán kính $46cm$, người ta đặt 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng $1cm$, mà không chứa điểm nào trong 2024 điểm đã cho.

Bài 6. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{x + y + z}}$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Họ tên và chữ kí. Cán bộ coi thi thứ nhất:

Cán bộ coi thi thứ hai:

HỌC TOÁN THẦY HOÀNG



HƯỚNG DẪN CHẤM

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 CẤP TỈNH

SỞ GD&ĐT ĐẮK LẮK

Năm học 2023 – 2024

(Đây không phải là đáp án chính thức của SGD Tỉnh Đắk Lắk)

Bài 1. (4,0 điểm)

- Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 - 2x + 23$, với $x = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} + \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$
- Trong mặt phẳng Oxy, cho đường thẳng $(d): y = (m-2)x + m + 1$, (m là tham số) và Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$. Chứng minh rằng với mọi số thực m đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

BÀI	Ý	NỘI DUNG ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1. (4,0 điểm)	1.	Đặt $m = \sqrt{3 + \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}$ và $n = \sqrt{3 - \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} \Rightarrow x = m + n$	0,5
		Ta thấy $\begin{cases} m^2 + n^2 = 6 \\ mn = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1 \end{cases}$ do đó $x^2 = (m^2 + n^2) + 2mn$	
		$\Rightarrow x^2 = 6 + 2(\sqrt{3}-1) = 4 + 2\sqrt{3}$	0,5
		$\Rightarrow x = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1$	0,5
		Thay vào ta có: $A = (4 + 2\sqrt{3}) - 2(\sqrt{3} + 1) + 23 = 25$	0,5
	2.	Gọi $(x; y)$ là giao điểm của (P) và (d) . Khi đó x, y thỏa mãn	0,5
		$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = (m-2)x + m + 1 \end{cases}$	
		Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $\frac{1}{2}x^2 = (m-2)x + m + 1$	0,5
		$\Leftrightarrow x^2 - 2(m-2)x - 2(m+1) = 0 \quad (I)$	
		Ta có: $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m+1)$	
		Do $\Delta' = (m-1)^2 + 5 \Rightarrow \Delta' > 0, \forall m$.	0,5
		nên phương trình (I) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.	
		Do đó (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với mọi m.	0,5

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \neq 0$ và $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $|x_1 - x_2|$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 + 2x^2 + 3y - 4x - 3xy + 2 = 0 \\ \sqrt{y-x+1} + \sqrt{x^2-y+3} - 2 = 0 \end{cases}$$

BÀI	Ý	NỘI DUNG ĐÁP ÁN	ĐIỂM
2. (4,0 điểm)	1.	Ta có: $2a + 3b + 6c = 0 \Rightarrow 2a = -3b - 6c$ Với $a \neq 0$, phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là phương trình bậc hai. Có $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 2c(-3b - 6c) = b^2 + 6bc + 12c^2$	0,5
		Ta thấy $\Delta = (b + 3c)^2 + 4c^2$ Do $a \neq 0$, nên b, c không đồng thời bằng 0. Khi đó $(b + 3c)^2 + 4c^2 > 0; \forall b + c \neq 0$ $\Rightarrow \Delta > 0; \forall b + c \neq 0$ Chứng tỏ rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .	0,5
		Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ Khi đó $9 x_1 - x_2 ^2 = 9(x_1 - x_2)^2$ $= 9(x_1 + x_2)^2 - 36x_1x_2 = \frac{9b^2 - 36ac}{a^2} = \frac{(2a + 6c)^2 - 36ac}{a^2} = 3 + \frac{(a - 6c)^2}{a^2}$	0,5
		Do $3 + \frac{(a - 6c)^2}{a^2} \geq 3$, mọi a, b, c nên $9 x_1 - x_2 ^2 \geq 3 \Rightarrow x_1 - x_2 \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ Vậy $\min x_1 - x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6c \\ 2a + 3b + 6c = 0 \end{cases}$ hay $a = -b = 6c$	0,5
	2.	Với $x, y \in \mathbb{R}$, sao cho $\begin{cases} y - x - 1 \geq 0 \\ x^2 - y + 3 \geq 0 \end{cases}$ (*) Hệ phương trình đã cho $\begin{cases} y^2 + 2x^2 + 3y - 4x - 3xy + 2 = 0 \\ \sqrt{y-x+1} + \sqrt{x^2-y+3} - 2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} [(y^2 - 2xy + x^2) - 1] + (x^2 - xy - x) - (3x - 3y - 3) = 0 \\ \sqrt{y-x+1} + \sqrt{x^2-y+3} - 2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y-1)(2x-y-2) = 0 \\ \sqrt{y-x+1} + \sqrt{x^2-y+3} - 2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ \sqrt{y-x+1} + \sqrt{x^2-y+3} - 2 = 0 \end{cases} \text{ (a) hoặc } \begin{cases} 2x-y-2=0 \\ \sqrt{y-x+1} + \sqrt{x^2-y+3} - 2 = 0 \end{cases} \text{ (b)}$	0,5
		Xét hệ (a), thay $y = x - 1$ vào $\sqrt{y-x+1} + \sqrt{x^2-y+3} - 2 = 0$, ta được: $\sqrt{x^2-x+4} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1.$	0,5

	Khi đó, tương ứng: $y=-1$; $y=0$	
	Xét hệ (b), thay $y=2x-2$ vào $\sqrt{y-x+1}+\sqrt{x^2-y+3}-2=0$, ta được: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-2x+5}=2 \Leftrightarrow (x^2-x)+2(\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x^2-2x+5})=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}[x\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-2x+5}]=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$ Khi đó, tương ứng: $y=0$ (do $x \geq 1 \Rightarrow x\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-2x+5} > 0$)	0,5
	Ta thấy 2 cặp $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ đều thỏa mãn Tóm lại hệ có 2 nghiệm là: $(x;y) \in \{(0;-1), (1;0)\}$	0,5

Bài 3. (4,0 điểm)

- Cho a, b là hai số nguyên dương thỏa mãn $\frac{(a+b)^2+4a}{ab}$ là số tự nhiên. Chứng minh rằng nếu b là số lẻ thì a là số chính phương.
- Tìm tất cả các tam giác vuông có độ dài các cạnh là các số nguyên dương và số đo chu vi bằng số đo diện tích.

BÀI	NỘI DUNG ĐÁP ÁN	ĐIỂM
3. (4,0 điểm)	1. Với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Đặt $M = \frac{(a+b)^2+4a}{ab}$ Gọi $d = \text{UCLN}(a, b) \Rightarrow \begin{cases} a = xd \\ b = yd \end{cases}; (d, x, y \in \mathbb{N}^*)$, với $\text{UCLN}(x; y) = 1$; Khi b lẻ thì y và d đều lẻ. Do đó $M = \frac{(a+b)^2+4a}{ab} = \frac{(dx+dy)^2+4dx}{dxdy} = \frac{d(x+y)^2+4x}{dxy}$ Vì $M \in \mathbb{N}^*$ nên $d(x+y)^2+4x : d \Rightarrow 4x : d$, do d lẻ nên $4 \nmid d \Rightarrow x : d$ Do đó $x = dz, (z \in \mathbb{N}^*)$	0,5
	$\Rightarrow M = \frac{d(dz+y)^2+4dz}{d^2yz} = \frac{(dz+y)^2+4z}{dyz}$, mà $M \in \mathbb{N}^*$ nên $(dz+y)^2+4z : z \Rightarrow y^2 : z$ (1), vì y lẻ nên z lẻ.	0,5
	Cũng do: $x = dz, (z \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow x : z$ (2) mà $\text{UCLN}(x; y) = 1$; nên $\text{UCLN}(dz; y) = 1 \Rightarrow \text{UCLN}(d; z) = 1$ (3)	0,5
	Do đó, từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow z = 1$ Với $z = 1$ thì $x = d$ và $a = d^2$. Vậy a là số chính phương	0,5
	2. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác cần tìm (với $a > b > c$). Khi đó ta có: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ a + b + c = \frac{1}{2}bc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 & (1) \\ 4(a + b + c) = bc & (2) \end{cases}$	0,5

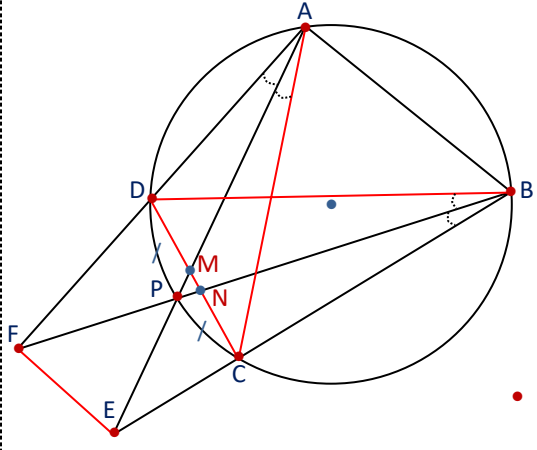
	Từ (1) và (2) ta có: $a^2 + 4(a+b+c) = (b+c)^2$ $\Leftrightarrow (a+b+c)(a-b-c+4) = 0$	
	do: $a+b+c > 0$ nên (I) $\Leftrightarrow a-b-c+4=0$ $\Leftrightarrow a+4=b+c$ (3)	0,5
	Từ (2) và (3) ta được: $(b-4)(c-4)=8$ (I)	
	Với $b, c \in \mathbb{N}^*$ xét các trường hợp ta có: $(b;c) \in \{(12;5), (5;12), (8;6), (6;8)\}$	0,5
	Lần lượt tính được: $a \in \{13;10\}$, chú ý $b+c > a > b-c $ Tóm lại, các tam giác vuông thỏa mãn bài ra là: $\{(5;12;13), (6;8;10)\}$	0,5

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) , Gọi P là điểm chính giữa của cung CD không chứa hai điểm A và B . Tia AP cắt đường thẳng BC tại E . Tia BP cắt đường thẳng AD tại F .

- Gọi M, N lần lượt là giao điểm của PA, PB với CD . Chứng minh rằng bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên một đường tròn và đường thẳng OP vuông góc với EF .
- Chứng minh $\left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = \frac{PE}{PA} \cdot \frac{PF}{PB}$
- Chứng minh $\frac{EF}{AB} + \frac{AB}{EF} + \frac{AF}{BE} + \frac{BE}{AF} \leq \frac{PE}{PA} + \frac{PA}{PE} + \frac{PF}{PB} + \frac{PB}{PF}$.

BÀI	Ý	NỘI DUNG ĐÁP ÁN	ĐIỂM
4. (6,0 điểm)	1.	Ta có: $\widehat{BNC} = \frac{sđ\widehat{BC} + sđ\widehat{DP}}{2}$ (1), góc có đỉnh bên ngoài đường tròn (O) Lại có: $\widehat{BAM} = \frac{1}{2}sđ\widehat{BP} = \frac{sđ\widehat{BC} + sđ\widehat{CP}}{2}$ (2), góc nội tiếp của (O) mà $sđ\widehat{DP} = sđ\widehat{CP}$ (do P là điểm chính giữa của cung CD) nên $\widehat{BNC} = \widehat{BAM}$	0,5
		Xét tứ giác $ABNM$ có: $\widehat{BNC} = \widehat{BAM}$ (chứng minh trên), do đó: $\widehat{BAM} + \widehat{BNM} = \widehat{BNC} + \widehat{BNM} = 180^\circ$ Do đó $ABNM$ là tứ giác nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°) Chú ý: Từ $\widehat{BNC} = \widehat{BAM}$, có thể kết luận: “ $ABNM$ là tứ giác nội tiếp” theo dấu hiệu tứ giác có góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.	0,5
		Xét đường tròn (O) , có: $\widehat{DAP} = \widehat{PBC}$ (2 góc nội tiếp, và $\widehat{DP} = \widehat{CP}$) hay $\widehat{FAE} = \widehat{FBE}$ do đó $ABEF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới góc không đổi) khi đó $\widehat{BAF} + \widehat{AFE} = 180^\circ$ lại có: $\widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (do $ABNM$ là tứ giác nội tiếp) do đó $\widehat{ADC} = \widehat{AFE}$, lại đồng vị nên $DC \parallel FE$ (1)	0,5

	Do $sđ\widehat{DP} = sđ\widehat{CP}$ nên $DP = CP$ mà $DO = CO$ nên OP là đường trung trực của CD . Do đó $OP \perp CD$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow OP \perp FE$	0,5
2.	Ta thấy $\widehat{FAP} = \widehat{PBE}$ (2 góc nội tiếp, $\widehat{DP} = \widehat{CP}$) kết hợp $\widehat{APF} = \widehat{BPE}$ (đối đỉnh) Do đó: $\triangle PEB \sim \triangle PFA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PE}{PF} = \frac{PB}{PA} = \frac{EB}{FA}$ (*) Do đó $\frac{PE}{PB} = \frac{PF}{PA}$ 	0,5
	$\Rightarrow \frac{PE}{PA} \cdot \frac{PF}{PB} = \frac{PE}{PB} \cdot \frac{PF}{PA} = \left(\frac{PE}{PB}\right)^2$ (1)	0,5
	Mặt khác: $\triangle PFE$ và $\triangle PAB$, có: $\frac{PE}{PF} = \frac{PB}{PA}$ (vì $\frac{PE}{PB} = \frac{PF}{PA}$); kết hợp $\widehat{EPF} = \widehat{APB}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle PFE \sim \triangle PAB$ (c.g.c) nên $\frac{PE}{PB} = \frac{EF}{AB}$ (2)	0,5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left(\frac{EF}{AB}\right)^2 = \frac{PE}{PA} \cdot \frac{PF}{PB}$	0,5
3.	Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có: $\frac{PE}{PA} + \frac{PF}{PB} \geq 2\sqrt{\frac{PE}{PA} \cdot \frac{PF}{PB}} = 2\sqrt{\frac{PE}{PB} \cdot \frac{PF}{PA}} = 2\sqrt{\left(\frac{EF}{AB}\right)^2} = 2 \cdot \frac{EF}{AB}$ Chứng minh tương tự: $\frac{PA}{PE} + \frac{PB}{PF} \geq 2 \cdot \frac{AB}{EF}$	0,5
	Do đó: $\frac{PE}{PA} + \frac{PA}{PE} + \frac{PF}{PB} + \frac{PB}{PF} \geq 2 \cdot \left(\frac{EF}{AB} + \frac{AB}{EF}\right)$ (I)	0,5
	Mặt khác, ta lại có: $\frac{PE}{PA} + \frac{PB}{PF} \geq 2\sqrt{\frac{PE}{PA} \cdot \frac{PB}{PF}} = 2\sqrt{\frac{PE}{PF} \cdot \frac{PB}{PA}} = 2\sqrt{\left(\frac{BE}{AF}\right)^2} = 2 \cdot \frac{BE}{AF}$ (theo (*)) Chứng minh tương tự: $\frac{PA}{PE} + \frac{PF}{PB} \geq 2 \cdot \frac{AF}{BE}$ Do đó $\frac{PE}{PA} + \frac{PA}{PE} + \frac{PF}{PB} + \frac{PB}{PF} \geq 2 \cdot \left(\frac{AF}{BE} + \frac{BE}{AF}\right)$ (II)	0,5
	Từ (I) và (II) suy ra: $\frac{EF}{AB} + \frac{AB}{EF} + \frac{AF}{BE} + \frac{BE}{AF} \leq \frac{PE}{PA} + \frac{PA}{PE} + \frac{PF}{PB} + \frac{PB}{PF}$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $PA = PB = PE = PF$, tức là: $ABEF$ là hình chữ nhật, còn $ABCD$ là hình vuông.	0,5

Bài 5. (2,0 điểm)

Trong hình tròn bán kính 46cm , người ta đặt 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1cm , mà không chứa điểm nào trong 2024 điểm đã cho.

BÀI	NỘI DUNG ĐÁP ÁN	ĐIỂM
5. (2,0 điểm)	Ta biết hình tròn bán kính R , sẽ nội tiếp được trong hình vuông cạnh $2R$. Do đó hình tròn bán kính 46cm , nội tiếp trong hình vuông cạnh 92cm . Ta chia hình vuông cạnh 92cm , thành $46 \times 46 = 2116$ hình vuông nhỏ (cạnh 2cm). Vì $2116 > 2024$ tức là số hình vuông nhỏ nhiều hơn số điểm phân biệt đã cho.	0,5 0,5
	Do đó theo nguyên lí Dirichlet có 1 hình vuông nhỏ (cạnh $d = 2\text{cm}$) không chứa bất kì điểm nào trong 2024 điểm đã cho.	0,5
	Nghĩa là luôn có (tồn tại) một hình tròn, có bán kính bằng $R = \frac{d}{2} = \frac{2}{2} = 1\text{cm}$ mà không chứa bất kì điểm nào trong 2024 điểm đã cho.	0,5

Bài 6. (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}$$

BÀI	NỘI DUNG ĐÁP ÁN	ĐIỂM
6. (2,0 điểm)	Với $x, y, z > 0$. Ta có: $x - \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \text{ mà } \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{xy^2}{2xy} = \frac{y}{2}$ $\Rightarrow x - \frac{x^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{y}{2}, \text{ nên } \frac{x^3}{x^2 + y^2} \geq x - \frac{y}{2} \quad (1).$ Chứng minh tương tự, ta được: $\frac{y^3}{y^2 + z^2} \geq y - \frac{z}{2} \quad (2);$ và $\frac{z^3}{z^2 + x^2} \geq z - \frac{x}{2} \quad (3)$	0,5
	Từ (1), (2) và (3) suy ra: $P = \frac{x^3}{x^2 + y^2} + \frac{y^3}{y^2 + z^2} + \frac{z^3}{z^2 + x^2} \geq \frac{1}{2}(x + y + z) \quad (I)$	0,5
	Mặt khác, ta có: $\frac{1}{2}(x + y + z) + \frac{1}{\sqrt{x + y + z}}$ $= \frac{1}{2} \left[(x + y + z) + \frac{1}{\sqrt{x + y + z}} + \frac{1}{\sqrt{x + y + z}} \right]$ $\geq \frac{1}{2} \cdot 3 \sqrt[3]{(x + y + z) \cdot \frac{1}{\sqrt{x + y + z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + y + z}}}$	0,5

	$= \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(x+y+z) + \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \geq \frac{3}{2} \quad (II)$	
	$\text{Từ (I) và (II)} \Rightarrow P = \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} + \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \geq \frac{3}{2}$	
	$\text{Vậy } \min P = \frac{3}{2}; \text{ đạt } \Leftrightarrow \begin{cases} x=y; y=z; z=x \\ x+y+z = \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z = \frac{1}{3}.$	0,5
TỔNG ĐIỂM		20

HẾT HƯỚNG DẪN