

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 22/3/2024

(Đề thi có 02 trang, gồm 9 câu)

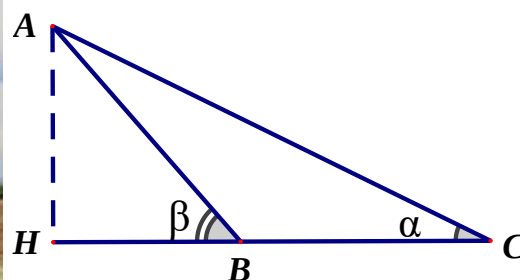
Câu 1. (3,0 điểm):

Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}.$$

Câu 2. (2,0 điểm):

Di tích danh thắng Núi Đá Dựng - Hà Tiên, Kiên Giang có chiều cao $AH = h(m)$ (Tham khảo hình sau). Để đo chiều cao của Núi người ta chọn hai điểm B, C thẳng hàng với chân H của Núi, B và C cách nhau $118(m)$. Sử dụng giác kế, từ C và B tương ứng nhìn thấy đỉnh A của Núi dưới các góc $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$ so với phương nằm ngang. Tính chiều cao h của Núi Đá Dựng.



Câu 3. (2,0 điểm):

Cho $0 < a < b < \frac{\pi}{4}$ và $\sin(a+b) = \frac{3}{4}$, $\cos(b-a) = \frac{4}{5}$. Tính giá trị $\tan 2a$.

Câu 4. (2,0 điểm):

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: x + y - 1 = 0, \quad \Delta_2: 2x - y + 3 = 0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD biết $A \in \Delta_1, C \in \Delta_2$ và hai đỉnh $B, D \in Ox$.

Câu 5. (2,0 điểm):

Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các chữ số của tập A . Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau thuộc tập S . Tính xác suất để trong hai số được chọn có đúng một số chia hết cho 2.

Câu 6. (2,5 điểm):

Ba số phân biệt có tổng 171 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 1, thứ 4, thứ 25 của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

Câu 7. (2,0 điểm):

Cho a là số thực dương và dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = a, x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + x_n^2}}}; \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Đặt $y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn dãy (y_n) khi n dần tới dương vô cực.

Câu 8. (2,5 điểm):

Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O) . Gọi AA_1, BB_1 và CC_1 là ba đường cao của tam giác ABC đồng quy tại H . Gọi I là trung điểm B_1A_1 . Đường thẳng BI cắt lại (O) tại K . Chứng minh rằng BB_1 là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IB_1K .

Câu 9. (2,0 điểm):

Cho phương trình: $\log_2(2x^2 - 4x + 4) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$.

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa phương trình đã cho, biết $0 \leq x \leq \sqrt{511} + 1$.

-----HẾT-----

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

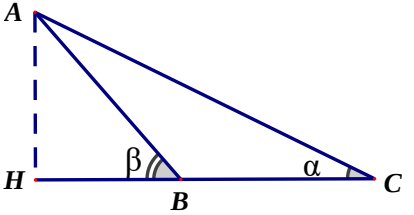
HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHÍNH THỨC

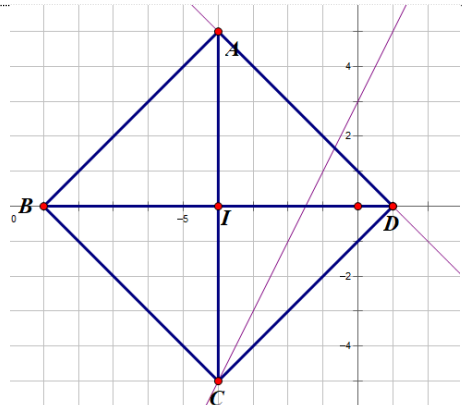
Môn: TOÁN
Thời gian: **180** phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: **22/3/2024**
(Hướng dẫn chấm có 5 trang)

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

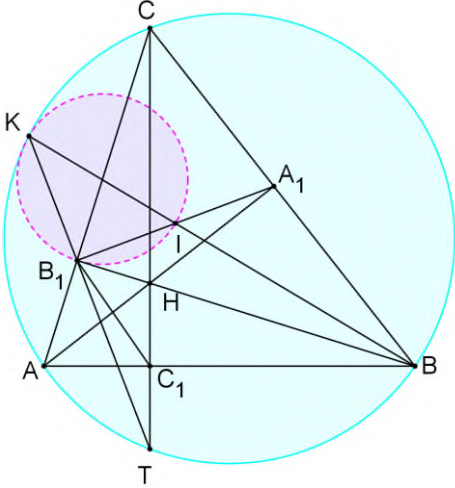
- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm lệch hướng dẫn chấm.
- Sau khi cộng điểm toàn phải thi vẫn giữ nguyên số điểm, không được làm tròn.

B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Câu	Nội dung	Biểu điểm
1. (3,0 điểm)	Giải phương trình $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$	
	Đk : $x \geq \frac{1}{5}$	0.5
	$pt \Leftrightarrow 5(5x-1-x-2) = (4x-3)(\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2})$	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3=0 \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2} = 5 \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ \sqrt{(5x-1)(x+2)} = 12-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = 2 \end{cases}$ KL	1
2. (2,0 điểm)	Di tích danh thắng Núi Đá Dựng - Hà Tiên, Kiên Giang có chiều cao $AH = h(m)$ (Tham khảo hình sau). Để đo chiều cao của Núi người ta chọn hai điểm B, C thẳng hàng với chân H của Núi, B và C cách nhau $118(m)$. Sử dụng giác kế, từ C và B tương ứng nhìn thấy đỉnh A của Núi dưới các góc $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$ so với phương nằm ngang. Tính chiều cao h của Núi Đá Dựng?	 

Câu	Nội dung	Biểu điểm
	Ta có $ABC = 180^\circ - \beta = 120^\circ \Rightarrow BAC = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$ Nên tam giác ABC cân tại $B \Rightarrow AB = BC = 118m$	0.75
	Trong tam giác AHB vuông tại H , có $\sin \beta = \frac{h}{AB} \Rightarrow h = AB \cdot \sin 60^\circ = 118 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 59\sqrt{3}(m)$	1
	Vậy chiều cao Núi Đá Dựng khoảng $59\sqrt{3}(m)$	0.25
3. (2,0 điểm)	Cho $0 < a < b < \frac{\pi}{4}$ và $\sin(a+b) = \frac{3}{4}$, $\cos(b-a) = \frac{4}{5}$. Tính giá trị $\tan 2a$	
	$0 < a < b < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a+b < \frac{\pi}{2} \\ 0 < b-a < \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan(a+b) > 0 \\ \tan(b-a) > 0 \end{cases}$	0.5
	$\cos(b-a) = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan(b-a) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(b-a)} - 1} = \frac{3}{4}$	0.5
	$\sin(a+b) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cot(a+b) = \sqrt{\frac{1}{\sin^2(a+b)} - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \tan(a+b) = \frac{3}{\sqrt{7}}$	0.5
	$\tan 2a = \tan((a+b) - (b-a)) = \frac{\tan(a+b) - \tan(b-a)}{1 + \tan(a+b)\tan(b-a)} = \frac{12 - 3\sqrt{7}}{9 + 4\sqrt{7}}$	0.5
4. (2,0 điểm)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta_1: x + y - 1 = 0$, $\Delta_2: 2x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$ biết $A \in \Delta_1, C \in \Delta_2$ và hai đỉnh $B, D \in Ox$.	
	$\begin{cases} A \in \Delta_1 \\ C \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(x_A; 1 - x_A) \\ C(x_C; 2x_C + 3) \end{cases}$ 	0.5

Câu	Nội dung	Biểu điểm
	$ABCD$ là hình vuông nên A, C đối xứng nhau qua B, D. Vì $B, D \in Ox$ nên $\begin{cases} x_A = x_C \\ -(1 - x_A) = 2x_C + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_C \\ x_C = -4 \end{cases}$ $A(-4; 5), C(-4; -5)$.	0.5
	Gọi I là tâm của hình vuông suy ra $I(-4; 0)$ $B(x_B; 0), D(x_D; 0)$ Ta có $IA = IB \Rightarrow IA^2 = IB^2 \Rightarrow (x_B + 4)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x_B = -9 \\ x_B = 1 \end{cases}$	0.5
	Suy ra $B(-9; 0), D(1; 0)$ hoặc $B(1; 0), D(-9; 0)$ Vậy $A(-4; 5), B(-9; 0), C(-4; -5), D(1; 0)$ Hoặc $A(-4; 5), B(1; 0), C(-4; -5), D(-9; 0)$	0.5
5. (2,0 điểm)	Cho tập hợp: $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số của tập A. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau thuộc S. Tính xác suất để trong hai số được chọn có đúng một số chia hết cho 2.	
	$n(S) = A_6^4 - A_5^3 = 300 \Rightarrow n(\Omega) = C_{300}^2 = 44850$	0.5
	Số các số chia hết 2: TH1: Tận cùng bằng 0: $A_5^3 = 60$ TH2: Tận cùng khác 0: $2 \cdot 4 \cdot A_4^2 = 96$	0.5
	Gọi A là biến cố trong hai số được chọn có đúng một số chia hết cho 2. $\Rightarrow n(A) = C_{156}^1 \cdot C_{144}^1 = 22464$	0.5
	Vậy $P(A) = \frac{288}{575}$.	0.5
6. (2,5 điểm)	Ba số phân biệt có tổng 171 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, cũng có thể coi là số hạng thứ 1, thứ 4, thứ 25 của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.	
	Gọi ba số cần tìm là a, b, c.	
	Từ giả thiết ta có $\begin{cases} a + b + c = 171 & (1) \\ b^2 = ac & (2) \end{cases}$	0.5
	Gọi cấp số cộng chứa các số hạng a, b, c có công sai là d Ta có: $b = a + 3d$ và $c = a + 24d$ thay vào (1) và (2) ta được $a + 9d = 57$ (3) và $9d^2 - 18ad = 0 \Leftrightarrow d = 0$ (loại) hoặc $d = 2a$ (4)	0.75
	Từ (3) và (4), ta được $a = 3, d = 6$. Vậy ba số cần tìm là 3; 21; 147	0.5
7.	Cho a là số thực dương và dãy số (x_n) xác định bởi	

Câu	Nội dung	Biểu điểm
(2,0 điểm)	$x_1 = a, x_{n+1} = \frac{x_n}{\sqrt{1+\sqrt{1+x_n^2}}} \forall n \in \mathbb{N}^*.$ Đặt $y_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn dãy (y_n) khi n dần tới dương vô cực.	
	Do $x_1 = a > 0$ nên $x_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có: $\sqrt{1+\sqrt{1+x_n^2}} > \sqrt{2}$ suy ra $\frac{x_n}{\sqrt{1+\sqrt{1+x_n^2}}} < \frac{x_n}{\sqrt{2}} < x_n$	0,5
	Hay $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn. Gọi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L \geq 0$.	0,5
	Từ công thức của dãy ta được: $L = \frac{L}{\sqrt{1+\sqrt{1+L^2}}} \Rightarrow L = 0$	0,5
	Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+x_n^2}} = \sqrt{2}$	0,5
8. (2,5 điểm)	Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Gọi AA_1, BB_1 và CC_1 là ba đường cao của tam giác ABC đồng quy tại H. I là trung điểm B_1A_1. Đường thẳng BI cắt lại (O) tại K. Chứng minh rằng BB_1 là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IB_1K.	
	 Xét tam giác B_1HC_1 và tam giác B_1BA_1 có $C_1B_1H = BB_1A_1$ và $B_1C_1H = B_1BA_1$. Dẫn đến $B_1HC_1 \sim B_1A_1B$. Gọi $T = CC_1 \cap (O)$	0,75

Câu	Nội dung	Biểu điểm
	Suy ra $\frac{HC_1}{HB_1} = \frac{A_1B}{A_1B_1} \Leftrightarrow \frac{HT}{2HB_1} = \frac{A_1B}{2A_1I} \Leftrightarrow \frac{HT}{HB_1} = \frac{A_1B}{A_1I}$. Từ đó $\Delta A_1BI \sim \Delta HTB_1$.	0,75
	Suy ra $B_1TH = KBA_1 = KTH$. Hay ba điểm T, B_1, K thẳng hàng.	0,5
	Suy ra $TKI = TCB = A_1B_1B$. Suy ra BB_1 là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IKB_1 .	0,5
9 (2,0 điểm)	Cho phương trình: $\log_2(2x^2 - 4x + 4) = 2^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$. Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa phương trình đã cho, biết $0 \leq x \leq \sqrt{511} + 1$.	
	Ta có (1) $\Leftrightarrow \log_2[2((x-1)^2 + 1)] = 2^{y^2} + y^2 - (x-1)^2$ $\Leftrightarrow \log_2[(x-1)^2 + 1] + [(x-1)^2 + 1] = \log_2 2^{y^2} + 2^{y^2}$ (2)	0,5
	Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ (2) $\Leftrightarrow f((x-1)^2 + 1) = f(2^{y^2}) \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 2^{y^2}$	0,75
	Do $1 \leq x \leq \sqrt{511} + 1 \Rightarrow 1 \leq (x-1)^2 + 1 \leq 512 \Rightarrow 1 \leq 2^{y^2} \leq 512$ $\Rightarrow 0 \leq y^2 \leq \log_2(512) = 9 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 3$ $y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 1 = 2^0 \Leftrightarrow x = 1$ $y = \pm 1 \Rightarrow (x-1)^2 + 1 = 2^1 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 0$ $y = \pm 2 \Rightarrow (x-1)^2 + 1 = 2^4$ (loại) $y = \pm 3 \Rightarrow (x-1)^2 + 1 = 2^9$ (loại) Vậy có 5 nghiệm $(x; y)$ là $(1; 0), (2; \pm 1), (0; \pm 1)$	0,75

Ghi chú: Thí sinh có thể có cách giải khác - Giám khảo thống nhất và cho điểm tương ứng

-----HẾT-----