

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LÂM ĐỒNG**

**KỶ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 CHUYÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021**

Môn thi: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 120 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm) Chứng minh rằng hàm số $y = (-m^2 + 2m - 10)x + 2021$ luôn nghịch biến với mọi giá trị của tham số m

Câu 2. (2,0 điểm) Giải phương trình : $\sqrt{4-x^2} + 6 = 2\sqrt{2+x} + 3\sqrt{2-x}$

Câu 3. (2,5 điểm) Tìm các số tự nhiên n sao cho $n^2 + 18n + 2020$ là số chính phương

Câu 4. (2,5 điểm) Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), hai đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AC = 8cm, BD = 6cm$. Tính chiều cao của hình thang

Câu 5. (1,5 điểm) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d, e ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$$

Câu 6. (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2 + mx + n = 0$, trong đó x là ẩn số, m, n là tham số thỏa mãn $m + n = 4$. Tìm các giá trị của m, n để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 = x_2 + x_2^2$

Câu 7. (2,0 điểm) Một tổ chức từ thiện cần chia đều một số quyền vở thành các phần quà để tặng cho các cháu nhỏ ở một trung tâm nuôi dạy trẻ mồ côi. Nếu phần quà giảm 6 quyền vở thì sẽ có thêm 5 phần quà nữa cho các cháu, còn nếu mỗi phần quà giảm đi 10 quyền vở thì các cháu sẽ có thêm 10 phần quà. Hỏi tổ chức từ thiện trên có bao nhiêu quyền vở ?

Câu 8. (2,5 điểm) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và đường tròn $(O; R')$ tiếp xúc trong tại điểm A ($R > R'$). Gọi BC là một dây của đường tròn lớn tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại D . Chứng minh rằng AD là tia phân giác của $\angle BAC$

Câu 9. (1,5 điểm) Cho các số thực x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn $x^3 = 3x - 1$; $y^3 = 3y - 1$; $z^3 = 3z - 1$. Tính giá trị biểu thức $S = x^2 + y^2 + z^2$

Câu 10. (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC . Gọi AH, BD, CK là các đường cao của tam giác ($H \in BC, D \in AC, K \in AB$). Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{HDK}}{S_{ABC}} + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

Ta có: $-m^2 + 2m - 10 = -(m^2 - 2m + 10) = -(m^2 - 2m + 10) = -(m - 1)^2 - 9 < 0 (\forall m)$

Nên hàm số đã cho luôn nghịch biến với mọi giá trị của tham số m

Câu 2.

ĐKXĐ: $-2 \leq x \leq 2$

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{(2+x)(2-x)} + 6 = 2\sqrt{2+x} + 3\sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2+x} - 3)(\sqrt{2-x} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2+x} = 3 \\ \sqrt{2-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7(ktm) \\ x = -2(tm) \end{cases}$$

Vậy $x = -2$

Câu 3.

Đặt $n^2 + 18n + 2020 = a^2 (a \in \mathbb{N}^*)$

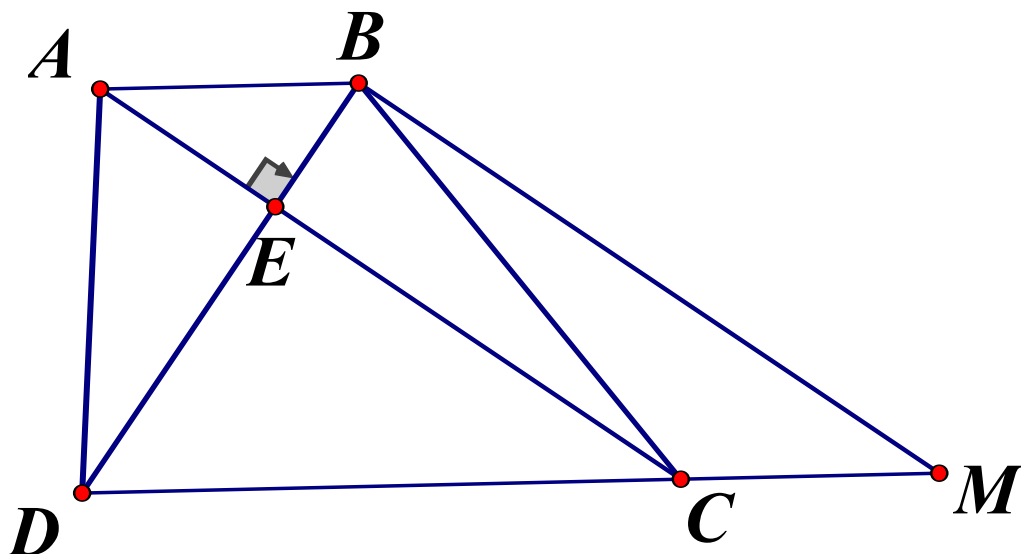
$$\Leftrightarrow (n+9)^2 + 1939 = a^2 \Leftrightarrow 1939 = a^2 - (n+9)^2$$

$$\Leftrightarrow (a - n - 9)(a + n + 9) = 1.1939 = 7.277$$

$$Do a + n + 9 > a - n - 9 \Rightarrow \begin{cases} a - n - 9 = 1 \\ a + n + 9 = 1939 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 970 \\ n = 960 \end{cases} (tm)$$
$$\begin{cases} a - n - 9 = 7 \\ a + n + 9 = 277 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 142 \\ n = 126 \end{cases} (tm)$$

Vậy $n = 126$ hoặc $n = 960$

Câu 4.



Giả sử DB và AC cắt nhau tại E . Kẻ đường thẳng $BM \parallel AC, M \in CD$

Gọi $h(cm)$ là độ dài chiều cao của hình thang

Xét tứ giác $ABMC$ có $AB \parallel CM, AC \parallel BM \Rightarrow ABMC$ là hình bình hành

$\Rightarrow AB = CM$ và $AC = BM = 8cm$

Vì $BD \perp AC, BM \parallel AC \Rightarrow BM \perp BD$. Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông BDM , ta có: $DM = \sqrt{BD^2 + BM^2} = 10(cm)$

Ta có: $2S_{DBM} = BD.BM = h.DM \Rightarrow h = \frac{BD.BM}{DM} = \frac{6.8}{10} = 4,8(cm)$

Vậy chiều cao của hình thang là $4,8cm$

Câu 5.

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e) \\
& \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 \geq 4a(b + c + d + e) \\
& \Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2e)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \\
& \Rightarrow \text{đpcm}
\end{aligned}$$

Câu 6.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4n = m^2 - 4(4 - m) = m^2 + 4m - 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 + 2\sqrt{5} \\ m < -2 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho nên $x_2^2 + mx_2 + n = 0$

$$\Leftrightarrow x_2^2 = -mx_2 - n = -mx_2 - 4 + m$$

$$\text{Vì } x_1 - x_2 = x_2^2 \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-m + \sqrt{\Delta}}{2} \\ x_2 = \frac{-m - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$

Khi đó ta có: $x_1 = x_2 + x_2^2 = x_2 - mx_2 - 4 + m$

$$\Leftrightarrow \frac{-m + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-m - \sqrt{\Delta}}{2} \cdot (1 - m) - 4 + m$$

$$\Leftrightarrow -m + \sqrt{\Delta} = (-m - \sqrt{\Delta})(1 - m) - 8 + 2m$$

$$\Leftrightarrow -m + \sqrt{\Delta} = -m - \sqrt{\Delta} + m^2 + m\sqrt{\Delta} - 8 + 2m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\Delta}(2 - m) = m^2 + 2m - 8 = (m - 2)(m - 4)$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(ktm) \\ \sqrt{\Delta} = -m - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -m - 4 \geq 0 \\ (-m - 4)^2 = m^2 + 4m - 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m^2 + 8m + 16 = m^2 + 4m - 16 \end{cases} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m = 8(ktm) \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 7.

Gọi số quyền vở tổ chức đó có là a (quyền) ($a \in \mathbb{N}^*$)

Gọi số vở ở mỗi phần quà ban đầu là b (quyền) ($b \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó số phần quà ban đầu là $\frac{a}{b}$ (phần quà)

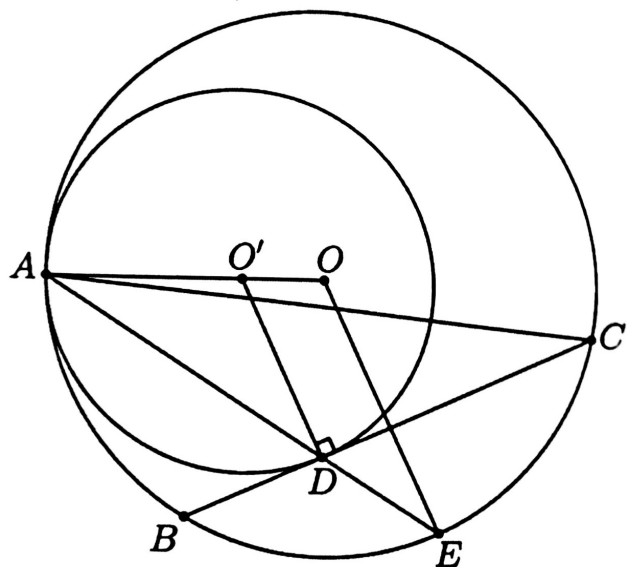
Theo đề bài ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{a}{b-6} = \frac{a}{b} + 5 \\ \frac{a}{b-10} = \frac{a}{b} + 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = a(b-6) + 5b(b-6) \\ ab = a(b-10) + 10b(b-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 5b^2 - 30b \\ a = b^2 - 10b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 30b = 0 \\ a = b^2 - 10b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0(ktm) \\ b = 30(tm) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 600(tm) \\ b = 30 \end{cases}$$

Vậy tổ chức từ thiện đó có 600 quyền vở

Câu 8.

Scanned with CamScanner

Giả sử AD cắt $(O; R)$ tại điểm thứ hai là E

Vì $\triangle O'AD$ cân tại O (do $O'A = O'D$) $\Rightarrow \widehat{O'AD} = \widehat{O'DA}$

Vì $\triangle OAE$ cân tại O (do $OA = OE$) $\Rightarrow \widehat{OAE} = \widehat{OEA}$

Suy ra $\widehat{O'DA} = \widehat{OEA}$, hai góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow O'D \parallel OE$

Mà $O'D \perp BC$ nên $OE \perp BC$

Xét $(O; R)$ có $OE \perp BC \Rightarrow E$ là điểm chính giữa của cung BC

$\Rightarrow$ cung $BE =$ cung $CE \Rightarrow \angle BAE = \angle EAC$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

$\Rightarrow AE$ là phân giác của $\angle BAC$

Câu 9.

Vì x, y, z đôi một khác nhau và thỏa mãn đề bài nên x, y, z là ba nghiệm phân biệt của phương trình $A^3 - 3A + 1 = 0$ và $(A - x)(A - y)(A - z) = 0$

$$\Leftrightarrow A^3 - A^2(x + y + z) + A(xy + yz + zx) - xyz = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + zx = -3 \\ xyz = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 0^2 - 2(-3) = 6$$

Câu 10.

Xét tứ giác $BKEH$ có $\widehat{BKE} = \widehat{BHE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BKE} + \widehat{BHE} = 180^\circ \Rightarrow BKEH$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle BHK = \angle BEK$ (cùng chắn cung BK)

Chứng minh tương tự, tứ giác $AKED$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{KAD} = \widehat{BEK}$ (cùng bù góc KED)

Chứng minh tương tự, tứ giác $HEDC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle CHD = \angle CED$ (chắn cung CD)

Mà $\angle CED = \angle BEK$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle KAD = \angle BEK = \angle BHK = \angle CHD = \angle BAC$

$$\Rightarrow \angle KHD = 180^\circ - \angle BHK - \angle CHD = 180^\circ - 2.\angle BAC = 180^\circ - 2.\angle A$$

Áp dụng công thức sin ta có:

$$\frac{S_{HDK}}{S_{ABC}} = \frac{HK.HD.\sin(180^\circ - 2\angle A)}{AB.AC.\sin A} = \frac{HK.HD.\sin 2A}{AB.AC.\sin A} = \frac{2HK.HD.\cos A}{AB.AC}$$

Xét $\triangle BKH$ và $\triangle BCA$ có: $\angle ABC$ chung; $\angle BKH = \angle BEH = 180^\circ - \angle HED = \angle BCA$

$$\Rightarrow \triangle BKH \sim \triangle BCA (g.g) \Rightarrow \frac{HK}{AC} = \frac{BK}{BC} = \frac{BH}{AB}$$

$$\text{Tương tự, } \triangle CHD \sim \triangle CAB \Rightarrow \frac{HD}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{CD}{CB}$$

$$\text{Mà } \cos A = \frac{AD}{AB} = \frac{AK}{AC}; \cos B = \frac{BK}{BC} = \frac{BH}{BA}, \cos C = \frac{CH}{CA} = \frac{CD}{CB}$$

$$\begin{aligned} \frac{S_{HDK}}{S_{ABC}} &= \frac{2HK.HD.\cos A}{AB.AC} = 2 \cdot \frac{BK}{BC} \cdot \frac{CD}{BC} \cdot \cos A = 2 \cos B \cdot \cos C \cdot \cos A \\ &= 2 \cos B \cdot \cos C \cdot \cos(\pi - B - C) = -2 \cos B \cos C \cos(B + C) \end{aligned}$$

Thay vào ta có:

$$\begin{aligned} \frac{S_{HDK}}{S_{ABC}} + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= -2 \cos B \cos C \cos(B + C) + \cos^2(B + C) + \cos^2 B + \cos^2 C \\ &= -2 \cos B \cos C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) + (\cos B \cos C - \sin B \sin C)^2 + \cos^2 B + \cos^2 C \\ &= (\cos B \cos C - \sin B \sin C)(\cos B \cos C - \sin B \sin C - 2 \cos B \cos C) + \cos^2 B + \cos^2 C \\ &= -(\cos B \cos C - \sin B \sin C)(\cos B \cos C + \sin B \sin C) + \cos^2 B + \cos^2 C \\ &= -\cos^2 B \cos^2 C + \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 B + \cos^2 C \\ &= -\cos^2 B \cos^2 C (1 - \cos^2 B)(1 - \cos^2 C) + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \frac{S_{HDK}}{S_{ABC}} + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 (đpcm)$$

Lời bình: Bài toán 10 có thể không cần ôn tập vì phần lớn lượng kiến thức nằm ở phần đại số lớp 10