

**Câu 1. (1,5 điểm)** Với  $x > 0$ , cho các biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ .

a) Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = 64$ .

b) Rút gọn biểu thức  $B$ .

c) Tìm  $x$  để  $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$ .

**Câu 2. (2,0 điểm)**

a) Giải phương trình:  $x + 3^4 + x + 5^4 = 82$ .

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} y - x = 2x^2 + 3x + 1 \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y+7} = 7y - 3x^2 + 1 \end{cases}$$

**Câu 3. (2,0 điểm)**

a) Cho parabol  $P: y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng  $d: y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$  với  $m$  là tham số.

Tìm  $m$  để  $P$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho  $|x_1 - x_2| = 2$ .

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên  $x, y$  của phương trình:  $xy - x + 3y = 6$ .

**Câu 4. (0,5 điểm)** Cho tập hợp  $A = \{201; 203; \dots; 2021; 2023\}$  gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp  $A$  sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

**Câu 5. (3,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  có 3 góc nhọn  $AB < AC$ . Vẽ đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác đó. Gọi  $H$  là giao điểm của các đường cao vừa vẽ. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AH$  và  $BC$ .

a) Chứng minh rằng  $\triangle MFN$  là tam giác vuông.

b) Chứng minh  $\triangle FMN \sim \triangle FAC$ .

c) Gọi  $P, Q$  lần lượt là chân các đường vuông góc từ  $M, N$  đến đường thẳng  $DF$ . Chứng minh rằng giao điểm của  $FE$  và  $MN$  thuộc đường tròn đường kính  $PQ$ .

**Câu 6. (0,5 điểm)** Cho  $a, b$  là 2 số thực dương.

a) Chứng minh rằng  $\sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{ab}$ .

b) Cho  $a + b = ab$  thỏa mãn  $a^2 + 3a - b \geq 0$  và  $b^2 + 3b - a \geq 0$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} + \sqrt{1+a^2} + \sqrt{1+b^2}$ .

-----@Hết@-----

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu 1. (1,5 điểm)** Với  $x > 0$ , cho các biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$  và  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ .

a) Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = 64$ .

b) Rút gọn biểu thức  $B$ .

c) Tìm  $x$  để  $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$ .

### Lời giải

a) Tính giá trị biểu thức  $A$  khi  $x = 64$ .

Ta có:  $x = 64$  (thỏa mãn điều kiện  $x > 0$ ). Khi đó:

$$A = \frac{\sqrt{64}-1}{\sqrt{64}} = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Vậy  $A = \frac{7}{8}$  khi  $x = 64$ .

b) Rút gọn biểu thức  $B$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x-1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}. \end{aligned}$$

Vậy  $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$  với  $x > 0$ .

c) Tìm  $x$  để  $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$ .

$$\text{Ta có: } \frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2}$$

$$\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > \frac{3}{2}$$

(ĐKXĐ:  $x > 0$  và  $x \neq 1$ )

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+2-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} > 0 \text{ (vì } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4.$$

Kết hợp điều kiện, ta được  $0 < x < 4$  và  $x \neq 1$ .

Vậy  $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$  khi  $0 < x < 4$  và  $x \neq 1$ .

**Câu 2. (2,0 điểm)**

a) Giải phương trình:  $x+3^4 + x+5^4 = 82$ .

b) Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} y-y-x = 2x^2+3x+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y+7} = 7y-3x^2+1 \end{cases}$$

### Lời giải

a) Giải phương trình:  $x+3^4 + x+5^4 = 82$ .

Đặt  $x + 4 = t$ . Khi đó phương trình trở thành:  $t - 1^4 + t + 1^4 = 82$

$$\Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 82$$

$$\Leftrightarrow t^4 + 6t^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 10 \quad t^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 4 \text{ (vì } t^2 + 10 > 0 \forall t \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x = -2 \\ t = -2 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

Vậy  $S = -2; -6$ .

**b) Giải hệ phương trình:** 
$$\begin{cases} y - x = 2x^2 + 3x + 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y+7} = 7y - 3x^2 + 1 & (2) \end{cases}$$

**ĐKXD:** 
$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y + 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow 2x^2 + xy - y^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(2x-y) + x+y + 2x-y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+1)(2x-y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 2x+1 \text{ (vì } x+y \geq 0 \text{ nên } x+y+1 > 0 \text{)}.$$

Thay vào phương trình (2), ta được:

$$\sqrt{x+2x+1} - \sqrt{x-2x-1+7} = 14x+7-3x^2+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \text{ (ĐKXD: } -\frac{1}{3} \leq x \leq 5 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 4 - \sqrt{6-x} - 1 + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4} - \frac{6-x-1}{\sqrt{6-x}+1} + x-5 = 3x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \cdot \left( \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 \right) = 0$$

$$\text{Vì } x \geq -\frac{1}{3} \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 > 0$$

Do đó  $x = 5 \Rightarrow y = 11$  (thỏa mãn).

Vậy  $x, y = 5; 11$ .

### Câu 3. (2,0 điểm)

**a)** Cho parabol  $P : y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng  $d : y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$  với  $m$  là tham số.

Tìm  $m$  để  $P$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho  $|x_1 - x_2| = 2$ .

**b)** Tìm tất cả các nghiệm nguyên  $x, y$  của phương trình:  $xy - x + 3y = 6$ .

#### Lời giải

**a)** Cho parabol  $P : y = \frac{1}{2}x^2$  và đường thẳng  $d : y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$  với  $m$  là tham số.

Tìm  $m$  để  $P$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2$  sao cho  $|x_1 - x_2| = 2$ .

Phương trình hoành độ giao điểm của  $P$  và  $d$  là:

$$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0 \quad (1)$$

Ta có:  $\Delta' = b'^2 - ac = -m^2 - 1m^2 - 2m - 2 = 2m + 2$

Để  $P$  và  $d$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 2m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Với  $m > -1$  có 2 nghiệm phân biệt. Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 2m - 2 \end{cases}.$$

Ta có:  $|x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$

$$\Rightarrow 2m^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4 \Leftrightarrow 2m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ tm}.$$

Vậy  $m = -\frac{1}{2}$ .

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên  $x, y$  của phương trình:  $xy - x + 3y = 6$ .

Ta có:  $xy - x + 3y = 6 \Leftrightarrow x(y - 1) + 3(y - 1) = 3 \Leftrightarrow (x + 3)(y - 1) = 3$ .

Vì  $x, y$  nguyên nên ta có các trường hợp sau:

|         |      |      |      |     |
|---------|------|------|------|-----|
| $x + 3$ | $-3$ | $-1$ | $1$  | $3$ |
| $y - 1$ | $-1$ | $-3$ | $3$  | $1$ |
| $x$     | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ |
| $y$     | $0$  | $-2$ | $4$  | $2$ |

Vậy  $x, y = -6; 0, -4; -2, -2; 4, 0; 2$ .

**Câu 4. (0,5 điểm)** Cho tập hợp  $A = 201; 203; \dots; 2021; 2023$  gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp  $A$  sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

#### Lời giải

Xét các cặp số  $a, b$  trong tập hợp  $A$  có tổng bằng 2288 là:

$$2023; 265, 2021; 267, 2019; 269, \dots, 1147; 1141, 1145; 1143 (*)$$

Số các cặp số  $a, b$  trong tập hợp  $A$  có tổng bằng 2288 là:

$$\frac{2023 - 1145}{2} + 1 = 440.$$

Số các số trong tập hợp  $A$  mà không có số ghép đôi để tổng bằng 2288 là:

$$912 - 2 \cdot 440 = 32.$$

Chọn ra 441 số từ (\*), theo Dirichlet tồn tại một nhóm chứa 2 số có tổng bằng 2288.

Vậy cần chọn ít nhất  $441 + 32 = 473$  số từ tập hợp  $A$  luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288.

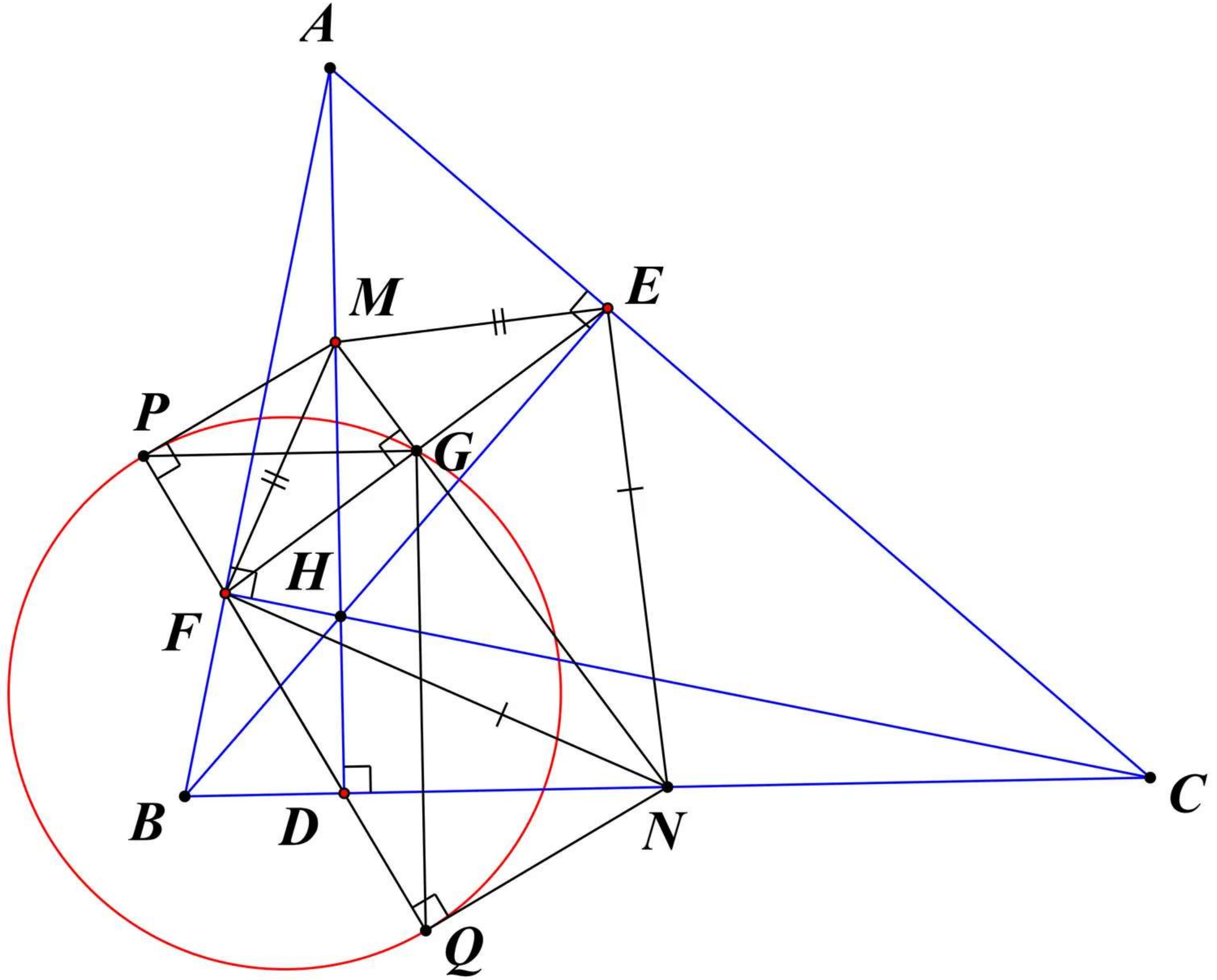
**Câu 5. (3,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  có 3 góc nhọn  $AB < AC$ . Vẽ đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác đó. Gọi  $H$  là giao điểm của các đường cao vừa vẽ. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AH$  và  $BC$ .

a) Chứng minh rằng  $\triangle MFN$  là tam giác vuông.

b) Chứng minh  $\triangle FMN \sim \triangle FAC$ .

c) Gọi  $P, Q$  lần lượt là chân các đường vuông góc từ  $M, N$  đến đường thẳng  $DF$ . Chứng minh rằng giao điểm của  $FE$  và  $MN$  thuộc đường tròn đường kính  $PQ$ .

**Lời giải**



a) Chứng minh rằng  $\triangle MFN$  là tam giác vuông.

Ta có các tam giác  $FHA$  và tam giác  $FBC$  là các tam giác vuông nên có

$$FM = MA = \frac{AH}{2} \text{ và } FN = NB = \frac{BC}{2} \text{ ( tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền )}$$

$$\Rightarrow MFA = BAD \text{ và } NFB = DBA$$

$$\Rightarrow MFA + NFB = BAD + DBA = 90^\circ \text{ ( vì tam giác } BAD \text{ vuông tại } D \text{ )}$$

$$\Rightarrow MFN = 180^\circ - MFA - NFB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle MFN \text{ là tam giác vuông}$$

b) Chứng minh  $\triangle FMN \sim \triangle FAC$ .

+) Xét  $\triangle BFC$  và  $\triangle HFA$  có:

$$AFH = BFC = 90^\circ$$

$$FAH = FCB \text{ (cùng phụ } ABC \text{ )}$$

$$\Rightarrow \triangle BFC \sim \triangle HFA \text{ g.g}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AF} = \frac{BC}{FC} \Rightarrow \frac{2AM}{AF} = \frac{2CN}{FC} \Rightarrow \frac{AM}{AF} = \frac{CN}{FC}.$$

+) Xét  $\triangle AMF$  và  $\triangle CNF$  có:

$$\frac{AM}{AF} = \frac{CN}{FC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$FAH = FCB \text{ (cùng phụ } ABC \text{ )}$$

$$\Rightarrow \Delta AMF \sim \Delta CNF (c.g.c) \Rightarrow \frac{FM}{AF} = \frac{FN}{FC}$$

+) Xét  $\Delta FMN$  và  $\Delta FAC$  có:

$$\frac{FM}{AF} = \frac{FN}{FC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle AFC = \angle MFN = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta FMN \sim \Delta FAC \text{ c.g.c.}$$

**Cách khác:** Ta có:  $MF = ME \left( = \frac{1}{2}AH \right)$  và  $NF = NE \left( = \frac{1}{2}BC \right)$

$\Rightarrow MN$  là đường trung trực của  $FE$

mà  $\Delta NFE$  cân tại  $N$   $NF = NE$

$\Rightarrow MN$  đồng thời là đường phân giác của  $\Delta NFE$

$$\Rightarrow FNM = \frac{1}{2}FNE \quad (3)$$

+) Ta có: tứ giác  $BFEC$  nội tiếp đường tròn tâm  $N$  (chứng minh câu a)

$$\Rightarrow FCE = \frac{1}{2}FNE \text{ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung } FE) \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra  $FNM = FCA \left( = \frac{1}{2}FNE \right) \Rightarrow \Delta FMN \sim \Delta FAC \text{ c.g.c}$

Ý c)

Gọi  $G$  là giao điểm của  $MN$  và  $FE \Rightarrow MN \perp FE$  tại  $G$  (do  $NF = NE = \frac{BC}{2}$  và

$MF = ME = \frac{AH}{2}$  nên  $MN$  là đường trung trực của  $EF$ )

+) Ta có: Tứ giác  $MPFG$  nội tiếp  $\angle MPF + \angle MGF = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle GPF = \angle GMF.$$

+) Ta có: Tứ giác  $GFQN$  nội tiếp  $\angle FGN + \angle FQN = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle GQF = \angle GNF$$

Cộng lại ta được  $\angle GPF + \angle GQF = \angle GMF + \angle GNF = 90^\circ$  (vì tam giác  $MFN$  vuông ở  $F$ )

$\Rightarrow \angle PGQ = 90^\circ$ . Vậy giao điểm của  $FE$  và  $MN$  thuộc đường tròn đường kính  $PQ$ .

**Câu 6. (0,5 điểm)** Cho  $a, b$  là 2 số thực dương.

a) Chứng minh rằng  $\sqrt{1+a} \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{ab}$ .

b) Cho  $a+b=ab$  thỏa mãn  $a^2+3a-b \geq 0$  và  $b^2+3b-a \geq 0$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = \frac{1}{a^2+3a-b} + \frac{1}{b^2+3b-a} + \sqrt{1+a^2} \sqrt{1+b^2}$ .

**Lời giải**

a) Chứng minh rằng  $\sqrt{1+a} \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{ab}$ .

Ta có:  $\sqrt{1+a} \sqrt{1+b} \geq 1 + \sqrt{ab} \Leftrightarrow 1+a+b+ab \geq 1+ab+2\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b}^2 \geq 0$ . Dấu “=” xảy ra khi  $a=b$ .

b) Cho  $a + b = ab$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} + \sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + b^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$ , ta có:

$$\frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} \geq \frac{4}{a^2 + 3a - b + b^2 + 3b - a} = \frac{4}{a^2 + b^2 + 2a + b}$$

$$\frac{1}{a^2 + 3a - b} + \frac{1}{b^2 + 3b - a} \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} = \frac{4}{(a + b)^2} \quad (\text{vì } a + b = ab)$$

Mặt khác  $\sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + b^2} \geq 1 + ab = 1 + a + b$  (theo câu a)

$$\text{Suy ra } P \geq \frac{4}{(a + b)^2} + 1 + a + b = \frac{4}{(a + b)^2} + \frac{a + b}{16} + \frac{a + b}{16} + \frac{7(a + b)}{8} + 1$$

+) Áp dụng bất đẳng thức Cô – sy cho 3 số dạng  $x + y + z \geq 3\sqrt{xyz}$ , ta có:

$$\frac{4}{(a + b)^2} + \frac{a + b}{16} + \frac{a + b}{16} \geq 3\sqrt{\frac{4}{(a + b)^2} \cdot \frac{a + b}{16} \cdot \frac{a + b}{16}} = \frac{3}{4} \quad (1)$$

$$+) \text{ Ta có: } a + b = ab \leq \frac{(a + b)^2}{4} \Leftrightarrow a + b^2 - 4(a + b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a + b - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a + b \geq 4 \quad (\text{vì } a, b > 0 \text{ nên } a + b > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{7(a + b)}{8} \geq \frac{7}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } P \geq \frac{3}{4} + \frac{7}{2} + 1 = \frac{21}{4}.$$

Dấu “=” xảy ra khi  $a = b = 2$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P = \frac{21}{4}$  khi  $a = b = 2$ .

-----@Hết@-----