

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI HSG QUỐC GIA
KIÊN GIANG NĂM HỌC 2024-2025

HƯỚNG DẪN CHẤM THI
Đề thi chính thức

Môn: **TOÁN**
 Thời gian: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)
 Ngày thi: **29/8/2024**
 Hướng dẫn chấm thi gồm 07 trang

I. Hướng dẫn chung

1. Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.
2. Nếu học sinh có sử dụng các định lý, hệ quả, các kết quả phụ trợ ... phổ biến trong các chuyên đề bồi dưỡng HSG và nêu được tên thì giám khảo vẫn chấm đúng.
3. Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 5: (7.0 điểm) Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(2xf(x) - 2f(y)) = 2x^2 - y - f(y), \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- a) Chứng minh rằng f là hàm lẻ.
- b) Tìm tất cả hàm số f thỏa mãn (1) .

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm
5	a	Dễ thấy f là hàm đơn ánh. Thay x bởi $-x$, ta được $f(-2xf(-x) - 2f(y)) = 2x^2 - y - f(y).$ Từ tính đơn ánh, ta suy ra được $f(-x) = -f(x), \forall x \neq 0$.	1đ
		Đặt $a = f(0)$, cho $x = y = 0$ ta được $f(-2a) = -a$. Cho $x = 0, y = -2a$ ta được $f(2a) = 2a - (-a)$. Giả sử $a \neq 0$, khi đó $-f(-2a) = f(2a) = 3a \Rightarrow a = 0$ (vô lý). Do đó $a = 0$. Suy ra: $f(0) = 0$. Vậy f là hàm lẻ.	1đ
	b	Thay y bởi $2x^2$ và do f là hàm lẻ nên ta được $f(2x^2) = xf(x) + x^2, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$ Cho $y = 0$ ta được $f(2xf(x)) = 2x^2$ nên f toàn ánh trên $\mathbb{R}^+$, mà f lẻ nên f toàn ánh trên $\mathbb{R}$. Vậy f song ánh trên $\mathbb{R}$. Cho $x = 0$ ta được $f(2f(y)) = y + f(y), \forall y \in \mathbb{R}$. Từ đó cho $y = 2xf(x)$	1đ

	ta được $f(4x^2) = 2xf(x) + 2x^2$. Do đó $f(4x^2) = 2f(2x^2) \Rightarrow f(2x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ do hàm f lẻ.	1đ
	Như vậy ta có $f(xf(x) - f(y)) = x^2 - f(f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Do tính toàn ánh nên ta có $f(xf(x) + y) = x^2 + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad . \quad (2)$	1đ
	Cho $x=1$ vào (1), ta được $f(1)=1$ và cho $x=1$ vào (2) ta được $f(y+1) = f(y)+1$, thay x bởi $x+1$ vào (2) ta được $x^2 + f(f(x) + x + y) + 1 = (x+1)^2 + f(y).$ Do đó $f(f(x) + x + y) = 2x + f(y)$.	1đ
	Cho $y=0$ ta được $f(f(x) + x) = 2x$. Suy ra $4f(x) = f(4x) = f(2f(f(x) + x)) = f(x) + x + f(f(x) + x) = f(x) + x + 2x.$ Do đó $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.	1đ

Câu 6 (7.0 điểm) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn phương trình $a^b + 1 = c$

- a) Chứng minh rằng không tồn tại hai ước $u, v (u > v)$ của c sao cho $2|u-v$ và b chia hết cho $u-v$.
- b) Cho $m \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $(c, m) = 1$. Giả sử b là lũy thừa của 2, đồng thời với mọi số nguyên dương n và với mọi p là ước nguyên dương của c thì $m.p + a^n$ là lũy thừa của a . Chứng minh rằng c không có ước chính phương.

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm
6	a	Giả sử ngược lại rằng tồn tại. Trước tiên dễ thấy c không là bội của 4 vì số chính phương chia 4 dư 0 hoặc 1 nên a^b chia 4 dư 1 hoặc 2. Do đó u, v phải là số lẻ vì $v_2(c) \leq 1$ nên u, v không thể đồng thời là số chẵn. Ta gọi p là ước nguyên tố lẻ của c và đặt $b = 2^s \cdot t$ và $a' = x$ trong đó $s, t \in \mathbb{N}$ và t lẻ. Ta có $x^{2^s} + 1 \vdots p \quad (1)$	1đ
		Ta sẽ chứng minh: $p \equiv 1 \pmod{2^{s+1}}$	

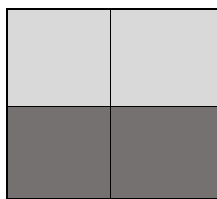
	Từ (1) suy ra $x^{2^{s+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Đặt $h = \text{ord}_p(x)$ suy ra $2^{s+1} : h \Rightarrow h = 2^{h_1}, h_1 \in \mathbb{N} \text{ và } h_1 \leq s+1.$ Nếu $h_1 \leq s$ từ định nghĩa của cấp ta có $x^h \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^{2^{h_1}} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow x^{2^{h_1} \cdot 2^{s-h_1}} \equiv x^{2^s} \equiv 1 \pmod{p}$ Mà $x^{2^s} \equiv -1 \pmod{p}$ nên $p=2$ (vô lý). Suy ra $h_1 = s+1$ kết hợp với định lý Fermat nhỏ ta được kết quả trên.	1đ
	Điều đó dẫn đến mọi ước lẻ của c khi chia cho 2^{s+1} đều dư 1. Nên $u - v : 2^{s+1} \Rightarrow b = t \cdot 2^s : u - v : 2^{s+1}$ Điều này là vô lý nên ta có điều phải chứng minh.	1đ
b	Bổ đề: Cho p là số nguyên tố lẻ và $a \geq 2$ là số nguyên dương. Nếu t là số nguyên dương lớn nhất sao cho $\text{ord}_{p^t}(a) = \text{ord}_p(a)$ Khi đó với mọi $r \in \{1, 2, \dots, t\}$ ta có $\text{ord}_{p^r}(a) = \text{ord}_p(a)$ và $r > t$ thì $\text{ord}_{p^r}(a) = p^{r-t} \cdot \text{ord}_p(a)$ <i>Chứng minh.</i> Ta chứng minh trường hợp $r \leq t$ còn trường hợp $r > t$ hoàn toàn tương tự. Đặt $\text{ord}_{p^t}(a) = \text{ord}_p(a) = h$ và $\text{ord}_{p^r}(a) = k$. Theo định nghĩa của cấp, ta có $p-1 : h \Rightarrow p > h$ và do t là số lớn nhất để $a^h \equiv 1 \pmod{p^t} \Rightarrow v_p(a^h - 1) = t$ Lại có $r \leq t$ nên $a^h - 1 : p^t : p^r \Rightarrow h : k$. Đặt $h = k \cdot l, l \in \mathbb{Z}^+$, nếu $l > 1$ thì $h > k$ áp dụng bổ đề LTE được $v_p(a^h - 1) = v_p\left((a^k)^l - 1\right) = v_p(a^k - 1) + v_p(l) = t$ Để ý rằng $v_p(a^k - 1) < t$ vì nếu $v_p(a^k - 1) = t$ thì $a^k - 1 : p^t \Rightarrow k : \text{ord}_{p^t}(a) = h \text{ vô lý vì } h > k.$ Suy ra $v_p(l) \geq 1$ hay $l : p \Rightarrow h : p$, điều này là vô lý vì $h \leq p-1$ Vậy điều giả sử là sai hay $l=1 \Rightarrow h=k$ hay ta có điều phải chứng minh.	1đ
	Quay lại bài toán. Đặt $b = 2^k, k \in \mathbb{Z}^+$, ta viết lại phương trình thành: $a^{2^k} + 1 = c$ Giả sử ngược lại c có ước chính phương, khi đó tồn tại số nguyên tố lẻ q sao cho $c : q^2$. Áp dụng tính chất câu a) ta có	1đ

	$q \equiv 1 \pmod{2^{k+1}} \Rightarrow q = l \cdot 2^{k+1} + 1 \Rightarrow a^{q-1} - 1 = a^{l \cdot 2^{k+1}} - 1 = (a^{2^{k+1}})^l - 1 = (a^{2^k})^{2l} - 1 = (a^{2^k} - 1)(a^{2^k} + 1) \dots (a^{2^k} + 1)^{l-1} \cdot q^2$ Suy ra $a^{q-1} - 1 : q^2$. Đặt $\text{ord}_p(a) = h$ và $\text{ord}_{p^2}(a) = i \Rightarrow q - 1 : i$. Gọi t là số lớn nhất sao cho $a^h - 1 : q^t$. Khi đó $a^{\text{ord}_{q^t}(a)} - 1 : q^t : q \Rightarrow \text{ord}_{q^t}(a) : \text{ord}_q(a)$ Mà theo tính chất cấp thì $\text{ord}_q(a) = h : \text{ord}_{q^t}(a)$ nên có được $\text{ord}_{q^t}(a) = \text{ord}_q(a)$	
	Nếu $t = 1$ áp dụng bổ đề với $r = 2$ ta được $p^{2-1} \cdot \text{ord}_p(a) = \text{ord}_{p^2}(a) \Rightarrow i : q$ Điều này là vô lý do $i \leq q - 1$ nên $t \geq 2$, lại theo bổ đề được $\text{ord}_{q^2}(a) = \text{ord}_q(a)$ Mặt khác theo giả thiết tồn tại $j \in \mathbb{N}$ sao cho $a^j = mq + a^n$. Dẫn đến $a^{j-n} - 1 : q \Rightarrow j - n : \text{ord}_q(a) = \text{ord}_{q^2}(a)$ Suy ra $mq : q^2$ (vô lý). Như vậy giả sử sai hay c không có ước chính phương. Vậy bài toán được giải quyết hoàn toàn.	1đ

Câu 7. (6.0 điểm) Cho bảng ô vuông $n \times n$ với n là số nguyên dương. Ta gọi tập hợp n ô vuông trong cùng một hàng hoặc một cột là một *dãy ô*. Với k là số nguyên dương cho trước, số n được gọi là k -tốt nếu tồn tại cách đặt các quân domino vào bảng ô vuông sao cho mọi dãy ô có đúng k ô được phủ bởi các quân domino (các quân domino được đặt sao cho mỗi quân phủ đúng 2 ô của bảng và không có ô nào được phủ bởi 2 quân domino khác nhau, tức các quân domino không xếp chồng lên nhau).

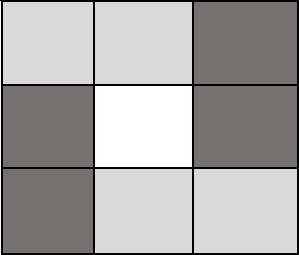
- Chứng minh rằng $n=4$ là 3-tốt và $n=3$ không là 3-tốt.
- Giả sử tồn tại số nguyên dương k sao cho n là k -tốt và thỏa mãn ứng với mỗi dãy ô có tối đa 1 quân domino phủ đồng thời 2 ô, trong đó có ít nhất n dãy ô mà ở từng dãy, mỗi quân domino chỉ phủ đúng 1 ô. Chứng minh rằng số quân domino dùng để phủ bảng thỏa mãn bằng n và chỉ ra cách đặt quân domino thỏa mãn.

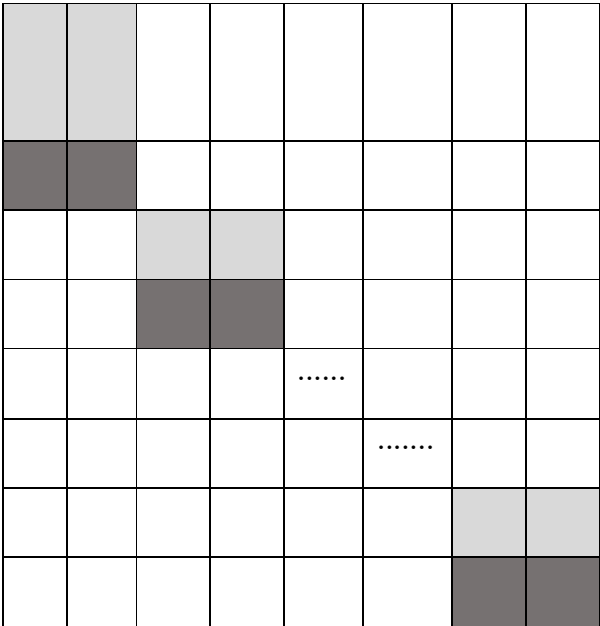
Domino là một hình chữ nhật gồm hai ô vuông đơn vị 2×1 hoặc 1×2 .



Ví dụ với $k=2, n=2$ là 2-tốt.

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm
7	a	Ta đánh số các hàng và các cột từ trái qua phải và từ trên xuống dưới là $1, 2, \dots, n$. Kí hiệu ô (i, j) là ô thuộc hàng i và cột $j, (i, j \in \{1, 2, \dots, n\})$. Với $k=3$, ta xét bảng ô vuông 4×4 và đặt như sau: Ta thấy rằng mỗi hàng và mỗi cột có đúng 3 ô bị domino phủ nên ta có điều phải chứng minh.	1đ
		Với bảng 3×3, không mất tính tổng quát ta giả sử domino phủ 2 ô $(1,1)$ và $(1,2)$ Khi đó do mỗi hàng phải có 3 ô được phủ nên ô $(1,3)$ cũng phải có quân domino phủ lên nên có quân domino phủ hai ô $(1,3)$ và $(2,3)$. Tương tự như vậy ta có cấu hình sau:	

				1đ
		Lúc này ta không thể đặt quân domino nào phủ lên ô $(2,2)$ nhưng ở cột 2 số ô bị domino phủ là 2 nên 3 không là số tốt.		
		Giả sử có m quân domino. Ta gọi a_i là số quân domino phủ lên các ô của dãy ô vuông thứ $i, (i = \overline{1, 2n})$ (Vì mỗi dãy ô vuông tương ứng với một hàng hoặc cột, mà ta có tổng cả hàng và cột là $2n$). Ta đếm số bộ $T_1 = (A, B)$, trong đó A là quân domino phủ lên ít nhất 1 ô của dãy ô vuông B. +) Cách 1 (Đếm theo quân domino): Ta có m quân domino và có hai trường hợp có thể xảy ra. Quân domino phủ lên 2 ô của 1 hàng và 1 ô của hai cột kề nhau hoặc phủ 2 ô trên 1 cột và 1 ô của hai hàng kề nhau. Tóm lại ta có 3 cách chọn dãy ô vuông B hay $T_1 = 3m$.		1đ
	b	+) Cách 2 (Đếm theo dãy ô vuông): Với mỗi dãy ô vuông i có a_i quân domino phủ lên $(i = \overline{1, 2n})$ nên $T_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n}$ Như vậy ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 3m$. Mặt khác từ giả thiết ta có: $a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} \geq n.k + (k-1)n = 2nk - n \quad (1)$		1đ
		Ta đếm số bộ $T_2 = (C, D)$ trong đó C là một ô được phủ bởi quân domino nào đó trên dãy ô vuông D. +) Cách 1 (Đếm theo ô vuông): ta có m quân domino và mỗi quân chiếm đúng 2 ô vuông nên có $2m$ cách chọn C và chọn D bằng cách chọn hàng chứa ô C hoặc cột chứa ô C nên có 2 cách. Vậy $T_2 = 4m$ +) Cách 2 (Đếm theo dãy ô vuông): có $2n$ cách chọn 1 dãy ô vuông và theo giả thiết mỗi dãy ô vuông có đúng k ô được phủ bởi các quân domino. Do đó ta có $T_2 = 2n.k$. Suy ra $2n.k = 4m \Leftrightarrow n.k = 2m$. Kết hợp với (1) ta có:		

		$3m + n \geq 4m \Leftrightarrow n \geq m$ Suy ra $n.k = 2m \leq 2n \Leftrightarrow k \leq 2$. Mà 1 domino phủ ít nhất 2 ô trong 1 dãy ô vuông nào đó nên $k = 2$ hay $m = n$. Từ đó dễ thấy n phải là số chẵn.	1đ
		Ta xây dựng cấu hình thỏa như sau: 	1đ

-----HẾT-----