

ĐỀ CHÍNH THỨC

Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{9x-5} = 4$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 2x + 4 = 10y \\ x^2y^2 + 4xy + 16 = 28y^2 \end{cases}$$

Câu 2 (1,0 điểm). Ở một cửa hàng chuyên kinh doanh miến, mỗi kilogram miến có giá nhập về là 70 nghìn đồng và giá bán ra niêm yết là 100 nghìn đồng. Biết rằng trong giá bán niêm yết đó chủ cửa hàng phải chi trả 15% cho tất cả các khoản như thuế, phí quản lý, giao hàng,... Tại thời điểm hiện nay, mỗi ngày cửa hàng đang bán được 200 kg miến. Nhân dịp khai trương thêm chi nhánh mới, chủ cửa hàng muốn chạy chương trình khuyến mãi giảm giá bán. Biết rằng nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 40 kg. Hỏi chủ cửa hàng đó cần giảm giá bao nhiêu % của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày?

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình $x^2 + (x-1)^2 = y^4 + (y-1)^4$.

b) Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $5^n - 1$ chia hết cho $(5^m - 1)^2$. Chứng minh rằng: n chia hết cho $m(5^m - 1)$.

Câu 4 (1,5 điểm).

a) Chứng minh rằng: $6\sqrt{x-1} + x\sqrt{5-x^2} \leq 8$ với $1 \leq x \leq \sqrt{5}$.

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}.$$

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Đường thẳng AI cắt đường thẳng BC tại điểm X .

a) Kẻ đường kính DH của đường tròn (I) , tiếp tuyến tại H của đường tròn (I) cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại các điểm P, Q . Gọi M, N tương ứng là các điểm đối xứng với X qua các đường thẳng IC, IB . Chứng minh rằng: MN vuông góc với DH và $QH \cdot BD = PH \cdot CD$.

b) Đường thẳng AI cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại các điểm G, J . Gọi K là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng: $QH \cdot BD = IG \cdot IJ$ và tam giác KGJ cân.

c) Biết tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Đường thẳng BI cắt đường thẳng CA tại điểm Y , đường thẳng CI cắt đường thẳng AB tại điểm Z . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} < \frac{2}{R - OI}.$$

Câu 6 (1,0 điểm). Số nguyên dương n được gọi là số CVP nếu: Với mọi n số nguyên $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \{1; 2; \dots; n\}$ sao cho $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ là số chẵn thì tồn tại một cách chọn dấu $+$ hoặc dấu $-$ để $x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm \dots \pm x_n$ bằng 0 hoặc 2. Chứng minh rằng:

a) 3 là số CVP.

b) 2025 là số CVP.

Hết

T
Họ và tên thí sinh

.....